Razonamiento Matemático

El área de razonamiento Matemático, incluye los conocimientos y habilidades mínimos deseables en los aspirantes, para emprender estudios en las Facultades de Arquitectura, Ciencias e Ingeniería, así como también destrezas para representar y relacionar información de diversas formas (lenguaje escrito, uso de símbolos y fórmulas, uso de dibujos, tablas, esquemas, diagramas, etc.)

Los tópicos incluidos forman parte de los programas oficiales de Educación Media y del primer año del Ciclo Diversificado. Para orientar a los aspirantes en cuanto a los temas cuyos contenidos se incluyen en la evaluación diagnóstica, se presenta a continuación un pequeño resumen teórico, a manera de guía, de dichos temas, que puede ser complementado con la bibliografía recomendada en Educación Media. El aspirante deberá estar en capacidad de integrar y relacionar diferentes tópicos para resolver un problema. A continuación se detallan los temas incluidos

Aritmética y Álgebra

1. Conjunto de número: N, Z, Q,y R. Operaciones con números.
2. Porcentajes.
3. Propiedades de potencias. Expresiones algebraicas.
4. Polinomios. Grado de polinomio de una variable. Operaciones. Teorema del Resto.
5. Productos notables. Factorización
6. Expresiones racionales. Simplificación
7. Ecuaciones de primer grado.
8. Ecuaciones de segundo grado. Raíces. Relación entre coeficientes y raíces.
9. Logaritmos y sus propiedades.
10. Sistemas de 2 ecuaciones lineales de 2 incógnitas.

Geometría y Trigonometría

1. Segmentos. Ángulos. Medida de un ángulo en grados y radianes.
2. Rectas paralelas y perpendiculares.
3. Rectas paralelas cortadas por una secante. Ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes.
4. Propiedades generales de triángulos.
5. Congruencia y semejanza.
6. Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras.
7. Cuadriláteros.
8. Área y perímetro de figuras planas.
9. Razones trigonométricas de un ángulo: seno, coseno, tangente. Identidad fundamental de la trigonometría. Cálculo de los elementos de un triángulo rectángulo dados dos de ellos.

Elaborado por los profesores Concepción Ballester y Gerardo Ramírez

Aritmética y Algebra

Números

Suponemos conocidos los distintos tipos de números, que iremos recordando a medida que vayan apareciendo, y las operaciones elementales entre ellos.

Adición:	sumando	+ sumando	=	suma
Sustracción:	minuendo	− sustraendo	=	diferencia
Multiplicación:	factor	× factor	=	producto
División:	dividendo	÷ divisor	=	cociente

Además, recordemos que

Sumando + 0 = sumando
1 x factor = factor
0 x factor = 0

Números Naturales

Los números **naturales** son los números que utilizamos para contar:

$$1, 2, 3, 4, 5 \cdots$$

Llamamos N = {1, 2, 3, 4, 5, · · · } al conjunto de todos los números naturales. N es un conjunto **infinito**.

Dados dos números naturales, **n** y **m**, si existe otro número natural **k** tal que **n=m×k** decimos que **n** es **divisible** por **m**; **m** y **k** son **factores de n** y **n** es múltiplo tanto de **m** como de **k**.

Ejemplo:

12 es divisible por 1 porque 12 = 1 × 12; 1 y 12 son factores de 12.
12 también es divisible por 2 ya que 12 = 2 × 6; 2 y 6 son factores de 12.
Además como 12 = 3 × 4, 3 y 4 son factores de 12.

Todos los factores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12 y 12 es múltiplo de 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Un número natural es **par** cuando uno de sus factores es **2**. Un número natural es **impar** si **2** no es factor de él.

2, 4, 6, 8, 10, 12· · · son números pares
1, 3, 5, 7, 9, 11, · · · son números impares.

Un número es **primo** si sus únicos factores son 1 y él mismo.
Algunos números primos son:

2, 3, 5, 11, 13, 17, 19 · · ·

El único número par **primo** es naturalmente el **2**. Todos los demás números primos son impares, aunque no todos los números impares son primos. Por ejemplo: 9, 15, 21, 25, 45, 63, etc... no son números primos. Hay infinitos números **primos**.

Ya vimos que 12 es múltiplo de 3, pero hay muchos más. Todos los números divisibles por 3 son múltiplos de 3.

Múltiplos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, · · ·
Múltiplos de 7 son: 7, 14, 21, 28, 35, 42, · · ·

Un múltiplo **común** de dos o más números dados es múltiplo de cada uno de ellos. Así 12 es múltiplo de 2, 3, 4 y 6; 42 es múltiplo de 2, 3, 6, 7, 14 y 21.

El **mínimo común múltiplo (mcm)** de dos o más números enteros es el menor número entero que es múltiplo de cada uno de ellos.

Los múltiplos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, · · ·
Los múltiplos de 5 son: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, · · ·
Vemos que 15, 30, 45, 60, · · · , son múltiplos comunes de 3 y 5.

El menor de los múltiplos comunes es 15. Por lo tanto **mcm** (3, 5) = 15.

Ejemplo: Verificar que:

a) **mcm** (4, 6) = 12

b) **mcm** (5, 3, 9) = 45
Solución:

El **mcm** se calcula tomando todos los factores primos de los números, elevados al mayor exponente.

Los factores primos de 12 son 2 y 3. Es $12 = 2^2 \times 3$.
En el caso de 45, sus factores primos son 3 y 5, y tenemos que $45 = 3^2 \times 5$.
El **mcm** de 12 y 45 debe contener todos los factores primos que aparecen en ambos números y con el mayor exponente con que aparecen. Los factores primos de 12 y 45 son 2, 3 y 5. El mayor exponente con que aparece 2 es 2, el mayor exponente con que aparece el 3 es 2. El 5 sólo aparece con el exponente 1. Entonces el mínimo común múltiplo de 12 y 45 es
mcm (12, 45) = $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

Ejemplo : Para hallar el **mcm** de **21, 30** y **54**, descomponemos dichos números en factores primos

$$\begin{aligned} 21 &= 3 \times 7 \\ 30 &= 2 \times 3 \times 5 \\ 54 &= 2 \times 3^3 \end{aligned}$$

Los factores 2, 5 y 7 aparecen con exponente 1.El máximo exponente con que aparece 3 es 3.
Entonces, **mcm** (21, 30, 54) = $2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 1.890$

Dos o más números pueden tener factores comunes, distintos de 1 que es factor de todo número. Por ejemplo ¿Cuáles son los factores comunes de 24, 36 y 30?
Como $24 = 2^3 \times 3$ sus factores son:

$$1, 2, 2^2, 2^3, 3, 6, 12 \text{ y } 24.$$

$36 = 2^2 \times 3^2$, entonces los factores de 36 son:

$$1, 2, 2^2, 3, 3^2, 6, 12, 18, \text{ y } 36.$$

$30 = 2 \times 3 \times 5$, entonces los factores de 30 son:

$$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 \text{ y } 30.$$

Los factores comunes de 24, 36 y 30 son: 1, 2, 3 y 6.

El **Máximo Común Divisor** (**MCD)** de dos o más números es el mayor de los factores comunes a todos ellos. Se calcula tomando todos los factores primos comunes a todos los números, con el menor exponente.
Por ejemplo, si queremos el **MCD** de 24, 36, y 60, como $24 = 2^3 \times 3$, $36 = 2^2 \times 3^2$ y $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, tendremos que el **MCD** es $2^2 \times 3 = 12$.

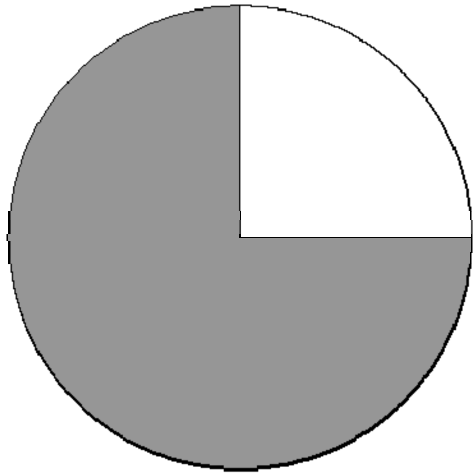
Usaremos estos conceptos cuando estudiemos la reducción, suma y resta de fracciones.

Fracciones

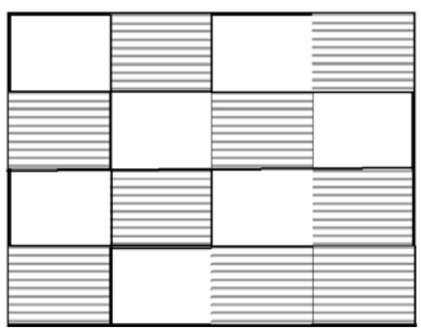
Recordemos que una **fracción** consiste en dos números separados por una barra. A veces la barra se coloca horizontal $\left(\frac{3}{7}, \frac{11}{4}\right)$ y a veces oblicua (3/7, 11/4). En los textos se encuentran escritas de cualquiera de las dos formas, pues significan lo mismo.

Una fracción es la división de un número, el **numerador** (que se coloca arriba o a la izquierda), entre otro número, el **denominador** (colocado abajo o a la derecha).
Por ejemplo, en la fracción 11/4 el **numerador** es 11 y el denominador es 4.

Las fracciones se pueden usar para representar partes de un todo.
En la figura siguiente, la fracción 3/4 representa la parte sombreada del círculo que ha sido dividido en 4 partes iguales.



Las fracciones también se utilizan para expresar razones, o comparaciones, entre dos cantidades. En el diagrama, el cuadrado ha sido dividido en 16 cuadraditos iguales. La fracción $\frac{9}{7}$ expresa la razón entre los cuadraditos sombreados y los no sombreados.



Dada una fracción, nos interesa encontrar la correspondiente fracción reducida, esto es la fracción en la cual se han eliminado los factores comunes del numerador y el denominador

Por ejemplo la fracción reducida correspondiente a 27/45 es 3/5.

En efecto el **MCD** de 27 y 45 es 9. Dividiendo el numerador, 27, entre 9 obtenemos 3 y dividiendo 45, el denominador; entre 9 obtendremos 5

Obsérvese que 6/10, 15/25, 21/35, 36/60, 66/110 etc. son todas expresiones de la fracción reducida 3/5

Operaciones con Fracciones
Multiplicación

Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores y los denominadores entre si. Ejemplos:

$$1)\ \frac{4}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{4\times3}{7\times5}=\frac{12}{35}$$

$$2)\ \frac{8}{15}\times\frac{5}{12}=\frac{8\times5}{15\times12}=\frac{40}{180}=\frac{2}{9}$$

$$3)\ 12\times\frac{5}{7}=\frac{12}{1}\times\frac{5}{7}=\frac{60}{7}$$

El **recíproco multiplicativo** de una fracción, es la fracción que tiene como numerador el denominador de la fracción dada y como denominador, el numerador de la fracción dada. El producto de una fracción por su recíproca es 1.
Así, la fracción recíproca de 2/5 es 5/2, la de 9/31 es 31/9 y la de 29=29/1 es 1/29.
la fracción dada, y como denominador el numerador de la dada. El producto de una fra

División

Para dividir una fracción entre otra, se la multiplica por la recíproca de la otra. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}\div\frac{7}{16}=\frac{3}{5}\times\frac{16}{7}=\frac{48}{35}$$

Otro ejemplo:

$$\frac{19}{8}\div 6=\frac{19}{8}\times\frac{1}{6}=\frac{19}{48}$$

Suma y resta

Para sumar o restar fracciones con el **mismo denominador**, se suma o restan los numeradores. **Ejemplos:**

$$1)\ \frac{13}{8}+\frac{5}{8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}\ (\text{fracción reducida})$$

$$2)\ \frac{15}{7}-\frac{8}{7}=\frac{15-8}{7}=\frac{7}{7}=1$$

$$3)\ \frac{39}{5}+\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{39+7-4}{5}=\frac{42}{5}$$

Si se desean sumar o restar fracciones con **denominador distintos** habrá que buscar expresiones de ellas con el mismo denominador. Conviene el menor denominador común posible, que será el **mínimo común múltiplo** de los denominadores.

Por ejemplo, si se quieren sumar las fracciones 1/60 y 5/72 el denominador común más conveniente será el **mcm** (60, 72), y como:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5, \text{ y } 72 = 2^3 \times 3^2$$

resulta **mcm** (60, 72) = 2^3 x 3^2 x 5 = 360

Por ser $\frac{1}{60} = \frac{6}{360}$ y $\frac{5}{72} = \frac{25}{360}$, se tiene $\frac{6}{360} + \frac{25}{360} = \frac{31}{360}$

Otro ejemplo: Efectuar 1/2 − 1/3 + 3/10.

Primero buscamos el **mcm** de los denominadores (2, 3, 10) el cual resulta 30 y las fracciones correspondientes con denominador 30, esto es:

1/2 = 15/30, 1/3 = 10/30 y 3/10 = 9/30, por lo tanto se tiene

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{15}{30} - \frac{10}{30} + \frac{9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

En el caso general

$$a)\ \frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{m.p}{n.q}$$

$$b)\ \frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \times \frac{q}{p} = \frac{m.q}{n.p}$$

$$c)\ \frac{m}{n} \pm \frac{p}{q} = \frac{mq \pm np}{nq}$$

ya que ***nq*** es múltiplo de ***n*** y ***q*** aunque no sea el **m.c.m(*n*,*q*)**

Observación importante: $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \neq \frac{m+p}{n+q}$

Comparación de Fracciones.

¿Cómo comparamos las fracciones? Esto es ¿Cómo decidimos cuál es mayor, igual o menor que otra? Si tienen el mismo denominador, basta comparar los numeradores.

Ejemplo: Comparar 4/17 con 7/17
Como 4 < 7, entonces tendremos que 4/17 < 7/17

Si se quiere comparar 4/7 y 5/9 ya no es tan evidente, por lo que para compararlas las expresamos con igual denominador. En la práctica, lo que se hace muchas veces es efectuar los productos cruzados numerador de una por denominador de la otra y comparar los resultados. Para el ejemplo dado tendríamos 4x9 y 5x7. Como 4x9=36 > 5x7=35 se tiene que 4/7>5/9.

Ejemplo:

¿Cuál es la mayor entre las fracciones 2/5, 3/7 y 4/11?
Para responder a la pregunta vamos a considerar dos de ellas, por ejemplo 2/5 y 3/7 y buscamos la mayor. Para ello hacemos $2 \times 7 = 14$ y $3 \times 5 = 15$ y como $14 < 15$, la mayor entre estas dos es 3/7
Comparamos ahora 3/7 con 4/11, para lo cual hacemos $3 \times 11 = 33$ y $4 \times 7 = 28$, y como $33 > 28$ la mayor entre 3/7 y 4/11 es 3/7.
Demuestra ahora que la menor de las tres es 4/11.

Decimales.

Una fracción también se puede escribir en forma decimal efectuando la división. Por ejemplo

a) 30/8 = 3, 75

b) 5/12 = 0,4166…= $0,41\widehat{6}$ $\left(\widehat{6}\right.$ significa que el 6 continúa repitiéndose$\left.\right)$

En este último caso al efectuar la división se observa que el 6 se sigue repitiendo. Decimos que el decimal es infinito periódico.

Todo decimal finito, o infinito periódico se puede expresar como una fracción.

Por ejemplo, para obtener la fracción correspondiente a x =25, 231 procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrl} & 1000x = & 25231,3131\ldots \\ - & 10x = & 252,3131\ldots \quad \text{Al restar se cancela la parte decimal} \\ \hline & 990x = & 24979, \qquad \text{por lo tanto } x = \dfrac{24979}{990} \end{array}$$

Porcentajes

Los porcentajes son fracciones de denominador 100. También se pueden pensar como decimales.
Un porcentaje p, se escribe p %. Ejemplos:

Porcentaje	**Fracción**	**Decimal**
45%	45/100	0, 45
7%	7/100	0, 07
12, 9%	12, 9/100 = 129/1000	0, 129
141%	141/100	1, 41

Si lo que nos interesa es conocer el número ***x*** que es el **p**% de una cantidad dada usamos la proporción:

$$\frac{x}{cantidad} = \frac{p}{100}, \text{ de donde } \quad x = \frac{p \times cantidad}{100}$$

Ejemplo para hallar el 25% de 32 hacemos

$$\frac{x}{32}=\frac{25}{100} \text{ y de aquí } x=\frac{25\times 32}{100}=8$$

El 25% de 32 es 8

Ejemplo: Hallar el 42,5 % de 80

$$\frac{x}{80}=\frac{42,5}{100}\Rightarrow x=\frac{80\times 42,5}{100}=\frac{3400}{100}=34$$

Ejemplo: Para hallar el $66,\widehat{6}$ de 24, procedemos de la siguiente manera

Expresamos $66,\widehat{6}$ en forma de fracción: $66,\widehat{6}=\frac{200}{3}$

Procedemos como en los ejemplos anteriores

$$\frac{x}{24}=\frac{200/3}{100}\Rightarrow x=\frac{24\times 200/3}{100}=\frac{1600}{100}=16$$

También podemos averiguar qué porcentaje de una cantidad es un número dado. Por ejemplo ¿Qué porcentaje de 36 es 27?

De acuerdo a lo establecido anteriormente $\frac{27}{36}=\frac{p}{100}\Rightarrow p=\frac{27\times 100}{36}=\frac{2700}{36}=75$

Por lo tanto 27 es el 75% de 36

Análogamente si nos interesa saber, por ejemplo, de qué cantidad es 54 el 9%, usamos la misma proporción

$$\frac{54}{c}=\frac{9}{100}\Rightarrow c=\frac{54\times 100}{9}=600$$

Entonces, 54 es el 9% de 600.

Ejemplo de aplicación:
El Sr. García compró un producto a Bs. 40 la unidad y un año después la vendió a Bs. 90 por unidad. ¿Cuál es el porcentaje (p%) de ganancia obtenido por el Sr. García?.

Solución:
La Ganancia por unidad es de 90 − 40 = 50 Bolívares. entonces

$$\frac{50}{40}=\frac{p}{100} \text{ y } p=\frac{50\times 100}{40}=125$$

En el denominador de la izquierda de la proporción se coloca 40, y no 90, ya que la ganancia se calcula sobre el precio de compra.

Álgebra

En álgebra usamos números y letras que representan números. Los números que usamos son:
Los números naturales N o sea 1, 2, 3, 4, · · ·
Los números enteros Z o sea −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, · · ·
Los números enteros son los números naturales, más los negativos, más el cero, por lo tanto

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \ (\subset \text{ significa contenido en})$$

Los números racionales **Q** son las fracciones, o por lo que vimos, el conjunto de los decimales finitos y los decimales infinitos periódicos. Como los enteros son números racionales es **Z** ⊂ **Q** tenemos:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}.$$

Definimos los **números reales R** como el conjunto de todos los anteriores más todos los decimales infinitos no periódicos. Tenemos así

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Cuando trabajamos con letras, en general indicamos la clase de números con que estamos trabajando.

Supongamos que **a, b, c,** · · · son números reales, y que estamos en presencia de un producto, entonces solemos omitir el signo por de la multiplicación, así, **a × b** lo escribimos **ab,**

$$\mathbf{5 \times a \times b \times c = 5abc}$$

Las operaciones con números racionales (fracciones) ya fueron estudiadas numéricamente en el capítulo anterior.

Operaciones con números reales

Con a, b, c, d, · · · x, y, z, u, · · · , designamos números reales
Con m, n, l, · · · , designamos números naturales.
Los números reales pueden ser positivos, cero o negativos.

Recordemos las leyes de los signos en el producto y la división de números reales:

(con (+) entendemos un número positivo y con (−) un número negativo)

$$(+)(+)=(+) \qquad (-)(-)=(+)$$
$$(+)(-)=(-) \qquad (-)(+)=(-)$$
$$\frac{(+)}{(+)}=(+) \qquad \frac{(-)}{(-)}=(+)$$
$$\frac{(+)}{(-)}=(-) \qquad \frac{(-)}{(+)}=(-)$$

De igual manera, recordemos que para todo número real ***a*** se verifica que $a \times 0 = 0$ y además que la división por 0 no tiene sentido.

Potencias:

Si ***n*** es un número entero positivo, la expresión: x^n se usa para representar el producto

$$\underbrace{x.x.x.....x}_{n \ \ veces}$$

Por ejemplo

$2^4 = 2.2.2.2 = 16$

$3^5 = 3.3.3.3.3 = 243$

La expresión x^n se lee **"potencia n-ésima de *x*"** o también ***"x elevada a la n"***

El número que se va a multiplicar por sí mismo (x) se llama **base** de la potencia, y el número de veces que se multiplica (n) se llama el **exponente** de la misma

Cuando n = 0, $x^0 = 1$, para cualquier valor de x diferente de 0

Cuando n = 1, $x^1 = x$ (se omite el exponente)

Para n = 2, x^2 se lee "x elevada al cuadrado"

y para n = 3, x^3 se lee "x elevada al cubo"

De acuerdo con las reglas de los signos un número negativo elevado a una potencia par da un resultado positivo y elevado a una potencia impar da un resultado negativo. Un número positivo elevado a cualquier potencia (par o impar) siempre da positivo.

Ejemplos:

$$5^3 = 5.5.5 = 125$$

$$5^4 = 5.5.5.5 = 625$$

$$(-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16$$

$$(-3)^3 = (-3).(-3).(-3) = -27$$

Propiedades de las potencias

$1)\ a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\qquad 2)\ \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$3)\ \left(a^m\right)^n = a^{m.n}$ $\qquad 4)\ \dfrac{1}{a^m} = a^{-m}$

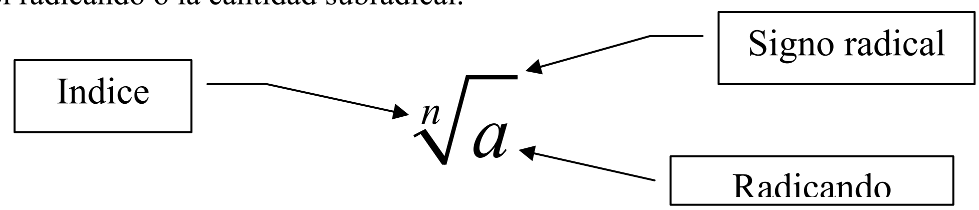
$5)\ (a.b)^n = a^n.b^n$ $\qquad 6)\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

$7)\ a^0 = 1$, para $a \neq 0$ $\qquad 8)$ Si $a^2 = b^2$ entonces $a = b$ o bien $a = -b$

Potencias de exponente fraccionario (raíces)

Si queremos hallar el valor de x que satisface $x^3 = 64$, debemos conseguir un número que elevado a la potencia 3, nos de 64. Este número es el 4, ya que $4^3 = 64$
Decimos en este caso que 4 es la "raíz cúbica" de 64

En general, si $x^n = a$, se dice que x es la "raiz n-ésima de a", lo cual se representa con la expresión $x = \sqrt[n]{a}$. Aquí el número $n \in N$, con $n > 1$, se denomina el índice de la raíz, mientras que ***a*** se llama el radicando o la cantidad subradical.



Cuando n es igual a 2, no se coloca el índice, escribiéndose solo $\sqrt{a}$, que se lee "raíz cuadrada de a"
Si n es impar, existe solo un valor de x que cumple con $x^n = a$, mientras que si n es par, existen dos valores que cumplen la condición.

Por ejemplo
Existe un solo valor que cumple con la condición $x^3 = -1$. Dicho valor es $x = -1$

Existen dos valores que satisfacen $x^2 = 9$ que son 3 y -3, ya que $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$

Observación importante:

Aunque en el caso en que n es par, existen dos valores de x que cumplen con $x^n = a$, las expresiones $x = \sqrt[n]{a}$ y $x = -\sqrt[n]{a}$, se refieren cada una a un solo valor, correspondiente al valor positivo o al negativo, respectivamente.
Ej. $\sqrt{4} = 2$ (solo el valor positivo), $-\sqrt{9} = -3$ (solo el valor negativo)

Cuando el índice es **par**, el radicando debe ser positivo para que la expresión exista en los reales. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no existe en los reales, ya que ningún número real, elevado al cuadrado es -4. Esta restricción no se aplica cuando el índice de la raíz es impar. Por ejemplo, $\sqrt[5]{-32}$ existe en los reales y es -2.

Una raíz es una potencia de exponente fraccionario

$$\sqrt[n]{a} = a^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

por lo tanto se puede trabajar con ellas usando las propiedades de las potencias estudiadas en el punto anterior.

Elaborado por los profesores Concepción Ballester y Gerardo Ramírez

Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es un conjunto de números (constantes) y letras (variables), separados por símbolos de + ó –. Cada grupo de números y letras, separados por los símbolos mencionados se denomina un ***término*** de la expresión. La parte numérica se denomina el **coeficiente** del término y las letras se llaman la **parte literal** del mismo.
Ej. En la expresión $25x^2y^7$, el coeficiente del término es 25, mientras que su parte literal es x^2y^7.

Se acostumbra nombrar una expresión algebraica, dependiendo del número de términos que la forman, así por ejemplo se denominan

Monomios: expresiones que contienen **un solo término**, constituido por el producto de números y letras (variables), elevados a potencias enteras positivas. Ejemplos: $ax^2y^3z^4$, $\frac{1}{2}xy^2$

Binomios: expresiones que contienen dos términos. Ej. x^2+y^2, b^2-4ac

Trinomios: si las expresiones contienen tres términos. Ej x^2-2x+4, $b^4+3ab-b^2a$

Cuando la expresión contiene más de tres términos se llama en general **Polinomio**
Ej. $5xy+9x^2y^3-2xy^2+3yx^7$

Llamamos **términos semejantes**, a aquellos que tienen exactamente la misma parte literal, diferenciándose solo en la parte numérica.

Se pueden **sumar o restar** polinomios usando las leyes conmutativa, asociativa y distributiva

Ejemplo 1: Efectuar y simplificar $(3x^2+5xy-3)-(8xy+10)+(-6x^2+2)$
Solución:
Primero se eliminan los paréntesis
$$3x^2+5xy-3-8xy-10-6x^2+2$$
Luego se agrupan términos semejantes
$$(3x^2-6x^2)+(5xy-8xy)+(-3-10+2)$$
Finalmente se suman los coeficientes de los términos semejantes
$$-3x^2-3xy-11$$

Ejemplo 2: Efectuar y simplificar $(8x^2y-xy-x-y-1)-(2x^2y-2xy-2y-5)$
Solución:
Eliminamos paréntesis $8x^2y-xy-x-y-1-2x^2y+2xy+2y+5$
Agrupamos términos semejantes $(8x^2y-2x^2y)+(-xy+2xy)-x+(-y+2y)+(-1+5)$
Sumando coeficientes $6x^2y+xy-x+y+4$

Producto

Para multiplicar expresiones algebraicas, multiplicamos cada término de una de ellas, por todos y cada uno de los términos de la otra (propiedad distributiva). Finalmente se reducen términos semejantes. Al multiplicar los términos se debe tener en cuenta
1.- Regla de los signos: Siempre que se multiplican dos signos iguales, el resultado es positivo, mientras que si son diferentes, el resultado es negativo
2.- La parte numérica se multiplica usando las propiedades para multiplicar números reales
3.- Al multiplicar la parte literal debemos recordar las reglas para multiplicar potencias ya estudiadas

Ejemplo: Efectuar y simplificar $\left(6+2x^2-5x\right)\left(x^3-3x+7\right)$

Solución:
Multiplicamos cada término de la primera expresión por cada término de la segunda
$$6x^3-6(3x)+6(7)+2x^2\left(x^3\right)-2x^2(3x)+2x^2 7-5x\left(x^3\right)-5x(-3x)-(5x)7$$
$$6x^3-18x+42+2x^5-6x^3+14x^2-5x^4+15x^2-35x$$
Finalmente se agrupan términos semejantes
$$2x^5-5x^4+29x^2-53x+42$$

Polinomios de una variable: Son polinomios en los cuales aparece una sola letra (variable), por ejemplo $9x^3-3x^2+2x+6$

En general, un polinomio de una variable tiene la forma
$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

Grado del polinomio: Corresponde a la mayor potencia a la cual aparece elevada la variable.

Ejemplo:
El polinomio $P(x)=x^3-6x^2+5x-7$ es de grado 3, ya que esta es la mayor potencia a la cual está elevada la variable.
El polinomio $Q(z)=3z-6+5z^4$, es de cuarto orden, ya que la mayor potencia a la cual aparece elevada la variable es 4.

División de polinomios
Para dividir un polinomio *P(x)* entre otro polinomio *Q(x)*, es necesario que el grado de *P(x)* sea mayor que el grado de *Q(x)*.

Al efectuar la división de *P(x)* entre *Q(x)*, se obtiene $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

Se denomina a *P(x)* **dividendo**, a *Q(x)* **divisor**, *C(x)* **cociente** y *R(x)* **residuo o resto**
A continuación se presenta un procedimiento para dividir polinomios, que se irá mostrando a medida que desarrollamos un ejemplo

Efectuar $x^4 - 2x^2 + 3x + 4 \div x^2 + 2x$

Solución:

Como primer paso se ordenan tanto el dividendo como el divisor en potencias decrecientes de la variable (de mayor a menor) y se escriben según el esquema mostrado. En el caso de que no aparezca una potencia, se coloca con coeficiente 0.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 3x + 4 & x^2 + 2x \\ \cline{2-2}
 & \\
 &
\end{array}
$$

A continuación se divide el primer término del dividendo (x^4) entre el primer término del divisor (x^2) y el resultado se escribe como primer término en el cociente

$$\left(\frac{x^4}{x^2} = x^2 \right)$$

Este término se multiplica por cada término del divisor, obteniéndose un polinomio el cual vamos a cambiar de signo y sumar con el dividendo. El procedimiento se repite hasta que el Resto sea de grado menor que *Q(x)*

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 3x + 4 & x^2 + 2x \\ \cline{2-2}
-x^4 - 2x^3 \qquad\qquad\qquad & x^2 - 2x + 2 \\ \cline{1-1}
-2x^3 - 2x^2 + 3x + 4 & \\
2x^3 + 4x^2 \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
2x^2 + 3x + 4 & \\
-2x^2 - 4x \qquad & \\ \cline{1-1}
-x + 4 &
\end{array}
$$

Finalmente, el resultado de la división se puede expresar como

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 3x + 4}{x^2 + 2x} = x^2 - 2x + 2 + \frac{-x + 4}{x^2 + 2x}$$

Ejemplo Calcular el cociente y resto de la división $x^4 - x - 2 \div x + 1$

Solución: Repitiendo el procedimiento anterior

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x - 2 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - x^3 \qquad\qquad\quad & x^3 - x^2 + x - 2 \\ \cline{1-1}
- x^3 + 0x^2 - x - 2 & \\
x^3 + x^2 \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
x^2 - x - 2 & \\
- x^2 - x \quad\; & \\ \cline{1-1}
-2x - 2 & \\
2x + 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

El cociente es $x^3 - x^2 + x - 2$ y el resto es 0.

En casos como el anterior en que el resto es **0,** decimos que el polinomio *P(x)* es “divisible” por el polinomio *Q(x)* o que *Q(x)* es un “factor” de *P(x).*

Cuando *Q(x)* es de la forma *Q(x)* = *x* - *a*, el resto siempre es igual a *P(a)* (Teorema del residuo).

Raíces de un polinomio

Decimos que el valor ***x = a***, es una raíz del polinomio ***P(x)***, si al evaluar el polinomio en dicho valor, el resultado es **0**, es decir, si ***P(a)= 0***

Por ejemplo, *-1* es una raíz del polinomio $P(x) = x^4 - x - 2$, ya que

$$P(-1) = (-1)^4 - (-1) - 2 = 0$$

Ecuaciones de Primer Grado de una variable

Una ecuación es una expresión matemática en la que dos cantidades son iguales.
Las ecuaciones que sólo contienen números son verdaderas o falsas.

Así:

3 + 5 = 8	Es verdadera
3 + 5 = 6	Es falsa.

Las ecuaciones que contienen una o más variables no son verdaderas ni falsas, pero al reemplazar las variables por valores numéricos específicos la ecuación numérica resultante puede ser verdadera o falsa.

Por ejemplo, si en la ecuación 5x + 4 = 14 reemplazamos x por 3 resulta 5(3) + 4 = 14 que es falsa, ya que 15 + 4 = 19.

Si damos a x el valor 2 tenemos 5(2)+ 4 = 14 que es verdadera

En una ecuación, los valores de las variables que hacen que la igualdad sea cierta, se denominan soluciones o raíces de la ecuación, y el conjunto de todas las soluciones de la misma se denomina conjunto solución de la ecuación

Ejemplo: $x=5$ y $x=1$ son soluciones de la ecuación $x^2-6x+5=0$, ya que

$$5^2-6(5)+5=0 \quad \text{y} \quad 1^2-6(1)+5=0$$

Resolver una ecuación significa hallar sus soluciones o raíces, esto es, aquéllos valores numéricos de la variable que la hacen verdadera.

A continuación se presenta un método para hallar las soluciones de una ecuación lineal, es decir, de una ecuación que tiene la forma general $ax+b=0$, siendo a y b constantes y $a \neq 0$

Ejemplo: Resolver la ecuación 5x + 4 = 14.

Lo primero que haremos es dejar el término que contiene la incógnita (x) a la izquierda, y los restantes términos los agrupamos a la derecha:

$$5x = 14 - 4$$

Al efectuar la operación indicada del lado derecho se tiene 5x = 10

Finalmente dividiendo ambos miembros de la igualdad por 5 nos queda

$$\frac{5x}{5}=\frac{10}{5}$$

de donde la solución de la ecuación es **x = 2**

Ejemplo: Resolver $5x-8=2x+1$

Esta ecuación la resolvemos de la misma manera que la anterior, agrupando los términos que contienen la incógnita x en un lado, y los restantes en el otro

$$5x-2x=8+1$$
$$3x=9$$
$$x=\frac{9}{3}=3$$

Si en la ecuación aparecen signos de agrupación:

Primero se deben efectuar las operaciones correspondientes para eliminar dichos signos de agrupación, luego de lo cual se procede de acuerdo a lo anterior.

Ejemplo: Resolver $(3x+6)(6x-1)=(9x-2)(2x+1)$
Solución:
En primer lugar desarrollamos los paréntesis, aplicando propiedad distributiva

$$18x^2-3x+36x-6=18x^2+9x-4x-2$$

Ahora agrupamos términos semejantes

$$28x-4=0$$

Esta es una ecuación del tipo estudiado, por lo que su solución es:

$$x=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$$

Si en la ecuación aparecen denominadores:

En este caso multiplicamos toda la ecuación por el **mínimo común múltiplo** de los mismos, para obtener una ecuación equivalente sin denominadores.

Ejemplo: Resolver $\frac{9}{5}x+4x=\frac{3}{2}+3$
Solución:
Primero multiplicamos toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que en este caso es 10

$$10\left(\frac{9}{5}x\right)+10(4x)=10\left(\frac{3}{2}\right)+3(10)$$
$$18x+40x=15+30$$

Agrupamos términos semejantes y resolvemos $x=\frac{45}{58}$

Ejemplo: Resolver $\frac{3x-1}{x+3}-\frac{3x+1}{x-2}=0$

Solución:
Multiplicamos por el mínimo común múltiplo de los denominadores $(x+3)(x-2)$

$$(3x-1)(x-2)-(3x+1)(x+3)=0$$

Desarrollamos los paréntesis $3x^2-x-6x+2-3x^2-9x-x-3=0$

Agrupamos términos semejantes y resolvemos

$$-17x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{17}$$

Si en la ecuación aparecen raíces

Se trata de dejar solo de un lado de la ecuación, el término que contenga la raíz, para luego elevar al cuadrado. Si aún aparece otra raíz en la ecuación se repite el procedimiento hasta haber eliminado todas las raíces. Siempre se deben comprobar las soluciones obtenidas sustituyendo en la ecuación, ya que a veces, por la manipulación algebraica que realizamos, resultan soluciones aparentes, que no satisfacen la ecuación.

Ejemplo: Resolver $\sqrt{1+\sqrt{3x}}=2$

Solución:

Elevando al cuadrado ambos miembros $1+\sqrt{3x}=4$

Dejamos solo de un lado el término con la raíz $\sqrt{3x}=3$

Volvemos a elevar al cuadrado $3x=9$

Solución $x=3$

Comprobamos si efectivamente este valor es solución, sustituyendo en la ecuación original

$$\sqrt{1+\sqrt{3(3)}}=2$$
$$\sqrt{1+3}=2$$
$$2=2$$

Por lo tanto $x=3$ es la solución de la ecuación

A veces aparecen ecuaciones en las cuales los coeficientes son letras.

Ejemplo: El área de un triángulo es ***A***, su base ***b*** y su altura ***h***, exprese la base ***b*** en función de ***A*** y ***h***

Solución: Sabemos que el área de un triángulo está dada por $A=\frac{b\cdot h}{2}$, para despejar ***b*** en función de ***A*** y ***h***, multiplicamos toda la ecuación por 2: $2A=bh$

Finalmente dividimos entre *h*, para obtener $\boxed{b=\frac{2A}{h}}$

Problemas cuyo planteamiento matemático conduce a una ecuación lineal

Muchas veces, en la vida diaria se nos presentan problemas que al ser modelados matemáticamente, nos conducen a una ecuación. Para escribir las ecuaciones del modelo, se debe ser capaz de traducir las frases verbales y expresiones al lenguaje matemático. Las expresiones matemáticas, en forma muy parecida a las expresiones en castellano, están constituidas por frases nominativas y verbos. La combinación de estas frases y verbos es lo que constituye una expresión matemática completa. A continuación se presentan algunas frases nominativas en castellano que suelen aparecer en los problemas y una expresión matemática representativa de dicha frase.

Lenguaje Verbal	**Variable(s)**	**Lenguaje Matemático**
El resultado de sumar 7 a un número.	x	$x+7$
La suma de tres números.	x , y , z	$x+y+z$
Hay seis veces más tortas que quesillos.	t , q	$6t = q$
Tres veces el total de la diferencia de dos números.	a , b	$3(a-b)$
El resultado de restar 15 del producto de dos números.	x , y	$xy-15$
La razón entre dos números es $\frac{3}{5}$.	a , b	$\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$
El beneficio es igual a la diferencia entre el ingreso y el costo.	B , I , C	$B = I - C$
El promedio de cuatro números es 40.	x_1, x_2 , x_3 , x_4	$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=40$
El doble de un número sumado al triple del mismo	x	$2x+3x$

Ejemplo de problemas:

1) Si se resta 20 de la suma del doble de un número más el triple del mismo, se obtiene 15 ¿Cuál es el número?

Solución:
Sea x el número que estamos buscando. De acuerdo al enunciado del problema se tiene que $2x+3x-20=15$. Resolviendo la ecuación se obtiene que el número es 7

2) El triple de un número excede a ese número en 12. ¿Cuál es el número?

Solución:
Sea x el número en cuestión
Se tiene que $3x = x+12$. Resolviendo esta ecuación lineal se tiene $x = 6$

Identidades

Una identidad es una ecuación que resulta cierta para cualquier valor de la variable

Productos Notables

En la práctica, aparecen con frecuencia productos de polinomios, a los cuales se les ha dado un nombre especial. Estos productos notables pueden ser desarrollados mediante identidades sencillas de recordar sin tener que realizar la multiplicación, lo cual hace más rápida y segura la manipulación algebraica.

Los productos notables de uso más frecuente son:

1.- Binomio al cuadrado

a) Cuadrado de una suma

$$\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

b) Cuadrado de una diferencia

$$\left(a-b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

En general

$\left(a \pm b\right)^2$	$=$	a^2	$\pm$	$2ab$	$+$	b^2
Binomio al cuadrado		Cuadrado del primer término		Doble producto del primer término por el segundo		Cuadrado del segundo término

***Aclaratoria*:**
Un error que se observa con mucha frecuencia es decir que $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + b^2}$, fíjate que si hacemos esto, estamos omitiendo el término **2*ab*** , por lo tanto es incorrecto (puedes demostrar que no es cierto evaluando para un par de números *a* y *b* cualesquiera)

Ejemplos: Desarrollar

a) $\left(6y+5x\right)^2$

Solución: Aplicando la fórmula para el cuadrado de una suma

$$\left(6y+5x\right)^2 = \left(6y\right)^2 + 2\left(6y\right)\left(5x\right) + \left(5x\right)^2 \quad = 36y^2 + 60yx + 25x^2$$

b) $\left(3xy^2 - 2x^2y^3\right)^2$

Solución: Usando la fórmula para el cuadrado de una diferencia

$$\left(3xy^2 - 2x^2y^3\right)^2 = \left(3xy^2\right)^2 - 2.\left(3xy^2\right)\left(2x^2y^3\right) + \left(2x^2y^3\right)^2 = 9x^2y^4 - 12x^3y^5 + 4x^4y^6$$

2.- Suma por diferencia: Cuando se tiene la suma de dos términos, multiplicada por la diferencia de los mismos

$$(a+b)(a-b)=\underbrace{a^2}_{\text{Cuadrado del primer término}}-\underbrace{b^2}_{\text{Cuadrado del segundo término}}$$

Ejemplos: Efectuar

a) $\left(\frac{1}{2}x+4\right)\left(\frac{1}{2}x-4\right)$

Solución: Aplicando la fórmula anterior

$$\left(\frac{1}{2}x+4\right)\left(\frac{1}{2}x-4\right)=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-(4)^2=\frac{1}{4}x^2-16$$

b) $\left(x^3y^2-xy^5\right)\left(x^3y^2+xy^5\right)$

Solución:

$$\left(x^3y^2-xy^5\right)\left(x^3y^2+xy^5\right)=\left(x^3y^2\right)^2-\left(xy^5\right)^2 = x^6y^4-x^2y^{10}$$

3.- Producto de dos binomios que tienen un término común

$$(a+b)\,(a+c)=a^2+(b+c).a+b.c$$

Dicho en palabras, esto es, el cuadrado del término común, más la suma algebraica de los términos no comunes multiplicada por el término común, más el producto de los términos no comunes

Ejemplos:

a) Efectuar $\left(t^2-7\right)\left(t^2+4\right)$

Solución:

Término común: t^2, términos no comunes: -7 y 4

$$\left(t^2-7\right)\left(t^2+4\right) = \underbrace{\left(t^2\right)^2}_{\text{Cuadrado término común}} + \underbrace{(-7+4)\left(t^2\right)}_{\text{Suma de términos no comunes, por el término común}} + \underbrace{(-7)(4)}_{\text{Producto términos no comunes}}$$

$$= t^4-3t^2-28$$

b)Efectuar $(2x+5)(5-3x)$

Término común: **5,** términos no comunes: $\mathbf{2x}$ y $-\mathbf{3x}$

Aplicando la fórmula:

$$(5+2x)(5-3x)=(5)^2+(2x-3x)(5)+(2x)(-3x) \quad = \quad 25-5x-6x^2$$

Factorización

Factorizar una expresión algebraica, significa sustituirla por otra equivalente, constituida por dos ó más expresiones (factores), que al ser multiplicadas originan la primera

Ejemplos:

a) $x^2+6x+9=(x+3)^2$
b) $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$
c) $2xy^2+6x^2y-4x^2y^2=2xy(y+3x-2xy)$

Existen diferentes maneras en que podemos factorizar una expresión algebraica dada. Entre estas, las más usadas son:

1.- *Factor común*:

Si todos los términos de la expresión contienen **un mismo factor**, se puede escribir esta como el producto de dicho **factor común**, multiplicado por la expresión necesaria para que al efectuar el producto, obtengamos la expresión original.

Si el factor común a todos los términos es literal (variable), se debe sacar elevado a la menor potencia con que aparece en alguno de los términos.

Ejemplo: Factorizar sacando factor común, la expresión $6x^3y^2-3x^2y+9xy$

Solución: Lo primero que observamos es que todos los coeficientes son divisibles entre 3, por lo tanto **3** es un factor común para todos los términos. Además, todos los términos contienen potencias de ***x*** e ***y***, siendo la menor potencia con que ambas aparecen en algún término 1
El factor común a todos los términos, es ***3xy***.

$$6x^3y^2-3x^2y+9xy=3xy(\qquad\qquad)$$

Dentro del paréntesis debemos colocar una expresión, que al ser multiplicada por el factor común, nos dé como resultado la expresión original.

$$6x^3y^2-3x^2y+9xy=3xy\left(2x^2y-x+3\right)$$

Siempre se puede verificar si la factorización es correcta, efectuando el producto y comprobando que lo que se obtiene es la expresión original

2.- *Diferencia de cuadrados*

Se basa en el producto notable suma por diferencia, o producto de binomios conjugados
En base a esto, una diferencia de cuadrados, la podemos expresar como un producto de binomios conjugados, en la forma

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Observación: No existe una expresión similar para una suma de cuadrados, es decir, la expresión $a^2 + b^2$, no puede factorizarse más.

Ejemplo: Factorizar la expresión $16x^2 - 25y^2$

Solución: Buscamos una expresión cuyo cuadrado sea $\mathbf{16x^2}$ y otra cuyo cuadrado sea igual a $\mathbf{25y^2}$. Estas expresiones son respectivamente ***4x*** y **5*y***, por lo tanto:

$$16x^2 - 25y^2 = \quad (4x-5y)(4x+5y)$$

3.- *Factorización de un trinomio*

1) *Trinomio cuadrado perfecto*

Se basa en el producto notable cuadrado de una suma o de una diferencia

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Cuando tenemos un trinomio, reconocemos que se trata de un trinomio cuadrado perfecto si:
i.- Dos de los términos son cuadrados perfectos (ambos deben ser positivos o ambos negativos)
ii.- El término restante corresponde al doble producto de las raíces cuadradas de los otros dos
Si estas condiciones se cumplen, el trinomio se puede factorizar en la forma: $(a \pm b)^2$
donde ***a*** es la raíz cuadrada de uno de los cuadrados perfectos y ***b*** la raíz cuadrada del otro.

Ejemplo: Factorizar la expresión: $9x^2 + 24xy + 16y^2$

Solución: Observamos que dos de los términos son cuadrados perfectos:

$$9x^2 = (3x)^2 \quad \text{y} \quad 16y^2 = (4y)^2$$

Chequeamos para ver si el término restante $24xy$ corresponde al doble producto de estos dos. En efecto, $2(3x)(4y) = 2.12xy = 24xy$ por lo tanto, la expresión dada puede factorizarse en la forma $9x^2 + 24xy + 16y^2 = (3x+4y)^2$. Se puede verificar el resultado desarrollando el binomio al cuadrado.

2) Trinomio de la forma x^2+bx+c

Un trinomio como este, si no es un binomio cuadrado perfecto, se puede factorizar como el producto de dos binomios que tienen un término común

$$x^2+bx+c=(x+\alpha)(x+\beta)$$

Debemos determinar los números α y β, para lo cual recordemos que

$$(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

Comparando las expresiones, tenemos que los números buscados deben cumplir las condiciones:

$$(\alpha+\beta)=b \quad \text{y} \quad \alpha\beta=c$$

Es decir, los números α y β, que estamos buscando deben ser tales que su producto sea $\boldsymbol{c}$ y su suma sea $\boldsymbol{b}$

Ejemplo: Factorizar la expresión $x^2+8x+15$

Solución: Para factorizar esta expresión como el producto de dos binomios con un término común, debemos determinar dos números cuyo producto sea 15 y cuya suma sea 8. Comenzamos buscando pares de números que al multiplicarlos nos den 15 y luego vemos cual es el par que sumado nos da 8

Pares de números cuyo producto es 15	Suma
$3 \;\; y \;\; 5$	$\boxed{8}$
$-3 \;\; y \;\; -5$	-8
$15 \;\; y \;\; 1$	16
$-15 \;\; y \;\; -1$	-16

La expresión se puede factorizar en la forma $x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$

La Ecuación Cuadrática General

La ecuación cuadrática general o ecuación de segundo grado, es una ecuación que tiene la forma

$$ax^2+bx+c=0, \quad \text{con } a\neq 0$$

Hay varias maneras de resolver una ecuación como esta.
Una de ellas consiste en factorizar el trinomio de acuerdo con las técnicas estudiadas y luego usar el hecho de que

$$Si\ a\cdot b=0, \ \ entonces \quad a=0 \quad y/o \quad b=0$$

Para factorizar sacamos en primer lugar factor común el coeficiente de x^2

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

Factorizamos luego el binomio que nos queda entre paréntesis, usando las técnicas de factorización expuestas en el punto anterior, para obtener algo de la forma

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

Como tenemos un producto igualado a cero, se deduce que

1) $(x-\alpha)=0$ ó 2) $(x-\beta)=0$

De 1) se tiene que $x=\alpha$ y de 2) $x=\beta$, que son las soluciones de la ecuación.

Es importante recordar que siempre se pueden comprobar las soluciones de la ecuación, sustituyéndolas en la misma y comprobando que se cumple la igualdad.

Ejemplo: Resolver $x^2-3x-10=0$
Solución:
Factorizando $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)=0$
Igualando cada factor a cero

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

La manera más común de resolver esta ecuación es usando la llamada **fórmula cuadrática**,

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, siendo *a*, *b* y *c* los coeficientes de la ecuación $ax^2+bx+c=0$

El número $D=b^2-4ac$ se denomina **discriminante** de la ecuación y dependiendo de cómo sea este valor se nos pueden presentar 3 casos:
1.- Si $b^2-4ac>0$, la ecuación tiene dos soluciones reales (raíces reales simples)
2.- Si $b^2-4ac=0$, la ecuación tiene una solución real (raíz real doble)
3.- Si $b^2-4ac<0$, la ecuación no tiene solución real (raíces complejas)

Ejemplo: Resolver $2x^2+x=15$

Soluciòn:
Primero pasamos todos los términos al lado izquierdo, para que nos quede cero del lado derecho

$$2x^2+x-15=0$$

Ahora identificamos los coeficientes en la ecuación $ax^2+bx+c=0$

$$a = 2,\ b = 1,\ c = -15$$

Aplicamos la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para esos valores de las constantes

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-15)}}{2(2)} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{4} = \frac{-1 \pm 11}{4}$$

En este caso como el discriminante es positivo se obtienen dos soluciones para la ecuación

$$x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-12}{4} = -3$$

Ejemplo: Resolver $3x^2 - 30x + 75 = 0$
Solución:
Para esta ecuación se tiene $a = 3,\ b = -30,\ c = 75$ y aplicando la fórmula

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4(3)(75)}}{2(3)} \Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{0}}{6} = \frac{30 \pm 0}{6} = 5$$

En este caso como el discriminante es cero, la ecuación tiene una sola solución.

Ejemplo: Resolver $\sqrt{x-1} + 3 = x$
Solución:
Por ser una ecuación con raíces, vamos a dejar el término con el radical solo de un lado de la ecuación

$$\sqrt{x-1} + 3 = x \qquad \Rightarrow \sqrt{x-1} = x - 3$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$x - 1 = (x-3)^2$$

Desarrollando el producto notable

$$x - 1 = x^2 - 6x + 9$$

Reagrupando $x^2 - 7x + 10 = 0$

Aplicamos la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(1)(10)}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \quad \text{de aquí} \quad x_1 = \frac{10}{2} = 5 \qquad x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

Por ser la ecuación original una ecuación con radicales, se deben verificar si los valores obtenidos son realmente soluciones de la ecuación

Prueba para $x_1 = 5$. Sustituyendo en la ecuación :
$\sqrt{5-1} + 3 = 5 \Rightarrow 2 + 3 = 5 \Rightarrow 5 = 5$ como se cumple la igualdad, $x_1 = 5$ es solución de la ecuación

Prueba para $x_2 = 2$. Sustituyendo en la ecuación
$\sqrt{2-1} + 3 = 2 \Rightarrow 1 + 3 = 2 \Rightarrow 4 = 2$ como no se cumple la igualdad, $x_2 = 2$ no es en realidad solución de la ecuación, por lo tanto la ecuación dada tiene una única solución que es $x = 5$

Sistemas de Ecuaciones

Denominamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a un conjunto de dos ecuaciones, en cada una de las cuales aparecen las mismas dos incógnitas.

Ejemplos:

a) $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 3x + 5y - 7 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}t + 3z - 28 = 0 \\ 8t + \dfrac{5}{2}z + 4 = 0 \end{cases}$

La solución de un sistema como estos es un par de números de la forma *(x,y)* que satisfacen ambas ecuaciones a la vez, por ejemplo $x = 1$, $y = 2$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

ya que $\begin{cases} 1 + 2 = 3 \\ -1 + 2 = 1 \end{cases}$

Dado un sistema de la forma $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$

Se puede presentar cualquiera de los siguientes casos

a) $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ en este caso el sistema tiene solución única

b) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ en este caso el sistema no tiene solución

c) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ el sistema tiene infinitas soluciones. Se dice que es indeterminado

Hay varias maneras de resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. A continuación se presentan algunos de ellos.

Método de Sustitución:
Consiste en:

- Despejar una de las incógnitas, de una de las ecuaciones que componen el sistema
- Sustituir la expresión resultante en la otra ecuación, para llegar a una ecuación con una incógnita.
- Esta ecuación se resuelve para obtener el valor de dicha incógnita.
- Para hallar el valor de la otra, se sustituye el resultado anterior en cualquiera de las ecuaciones y se despeja.

Ejemplo: Resolver $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$

Solución:
Sabemos en primer lugar que el sistema tiene solución ya que $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{4}$

Despejamos una de las incógnitas, de una de las ecuaciones, por ejemplo ***y*** de la primera ecuación $y = 6 - 2x$, luego esta expresión la sustituimos en la otra ecuación

$$3x + 4(6 - 2x) = 4$$

Resolvemos ahora esta, que es una ecuación con una incógnita

$$3x + 24 - 8x = 4$$

$$-5x = -20 \Rightarrow x = \frac{-20}{-5} = 4$$

Para hallar el correspondiente valor de **y** sustituimos este valor en la expresión que habíamos obtenido al despejar

$$y = 6 - 2x = 6 - 2(4) = -2$$

La solución del sistema es $x = 4,\ y = -2$

Método de Igualación
Consiste en:

- Despejar la misma incógnita, en ambas ecuaciones
- Igualar las expresiones resultantes, para llegar a una ecuación con una incógnita.
- Resolver para obtener el valor de dicha incógnita.
- Para hallar el valor de la otra, se sustituye el resultado anterior en cualquiera de las ecuaciones y se despeja.

Resolveremos el mismo sistema anterior usando este método
Primero despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones
De la primera ecuación obtenemos $y = 6 - 2x$

de la segunda obtenemos $y = \frac{4 - 3x}{4}$

Igualamos ambas expresiones para obtener una ecuación con una sola incógnita, que podemos resolver para hallar x

$$6 - 2x = \frac{4 - 3x}{4} \Rightarrow 24 - 8x = 4 - 3x \Rightarrow x = 4$$

Para hallar **y** se procede como en el caso anterior

Método de Reducción

Consiste en:
-Escribir ambas ecuaciones en la forma Ax+By+C=0 (sin denominadores)
-Elegir que variable se desea eliminar
-Lograr que dicha variable en ambas ecuaciones aparezca con el mismo coeficiente y signos contrarios, para lo cual se puede multiplicar una o ambas ecuaciones por algún número (no tiene que ser el mismo para ambas)
-Sumar ambas ecuaciones para eliminar una variable y obtener una ecuación con una incógnita. A partir de aquí se procede como en los anteriores

Ejemplo: Resolveremos por este método el sistema con que hemos venido trabajando

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$$

Queremos lograr que una incógnita, por ejemplo la x, tenga el mismo coeficiente y signos contrarios en ambas ecuaciones, para lo cual multiplicaremos la primera ecuación por 3 y la segunda por –2, obteniendo

$$\begin{cases} 6x + 3y = 18 \\ -6x - 8y = -8 \end{cases}$$

Sumamos ahora ambas ecuaciones término a término

$$\begin{array}{r} 6x + 3y = 18 \\ -6x - 8y = -8 \\ \hline 0 - 5y = 10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad y = -2$$

Para hallar x sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo la primera

$$2x + (-2) = 6 \quad \Rightarrow x = 4$$

Logaritmos

La función $f(x) = log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, siendo x un número real, se denomina función logarítmica de base a.

La expresión $log_a x$ se lee “logaritmo en base a de x ”

El logaritmo y la exponencial están relacionados, de manera que:

$$y = log_a x \ \text{sí y solo sí} \ x = a^y$$

El $log_a x$ representa el número al cual hay que elevar ***a***, para obtener el valor ***x***

Ejemplos:

$log_2 4 = 2,\ ya\ que\ 2^2 = 4$

$log_5 125 = 3,\ ya\ que\ 5^3 = 125$

$log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4,\ ya\ que\ 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

Como $a > 0$ entonces $a^y > 0$, de modo que $\boldsymbol{log_a x}$ **existe solo sí $x > 0$** *(no existe el logaritmo de cero, ni de ningún número negativo)*

Propiedades de los logaritmos
Para todo par de números reales positivos x e y

1.- $log_a(xy) = log_a x + log_a y$

2.- $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$

3.- Para todo $x > 0$, y todo número p

$$log_a x^p = p.log_a x$$

4.- El logaritmo, en cualquier base de 1 es cero

$$log_a 1 = 0$$

5.- Para todo número p

$log_a a^p = p$ e igualmente $a^{log_a p} = p$ en particular $log_a a = 1$

Ejemplos:

1.- Utiliza las propiedades de los logaritmos, para expresar $log_a \sqrt[4]{\frac{xy}{z^3}}$ en términos de los logaritmos de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$

Solución:

La expresión dada se puede escribir de la forma $log_a\left(\frac{xy}{z^3}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)}$

Luego usando la propiedad 3: $log_a\left(\frac{xy}{z^3}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} log_a\left(\frac{xy}{z^3}\right)$

Usando ahora la propiedad 2: $\frac{1}{4}log_a\left(\frac{xy}{z^3}\right) = \frac{1}{4}\left[log_a\left(xy\right) - log_a\left(z^3\right)\right]$

Por último usamos las propiedades 1 y 3

$$\frac{1}{4}\left[\underbrace{log_a x + log_a y}_{propiedad\ 1} - \underbrace{3log_a z}_{propiedad\ 3}\right] = \frac{1}{4}log_a x + \frac{1}{4}log_a y - \frac{3}{4}log_a z$$

2.- Utiliza las propiedades de los logaritmos, para expresar como un solo logaritmo:

$$\frac{1}{2}log_a x - 7log_a y + log_a z$$

Solución:

Aplicando la propiedad 3: $\frac{1}{2}log_a x - 7log_a y + log_a z = log_a x^{\left(\frac{1}{2}\right)} - log_a y^7 + log_a z$

de acuerdo a la propiedad 1: $log_a x^{\left(\frac{1}{2}\right)} + log_a z - log_a y^7 = log_a x^{\frac{1}{2}}.z - log_a y^7$

finalmente por la propiedad 2 $log_a x^{\frac{1}{2}}.z - log_a y^7 = log_a\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}.z}{y^7}\right)$

3.- Utiliza las propiedades de los logaritmos, para expresar como un solo logaritmo:

$$log_3\left(x^2-4\right) - log_3\left(x-2\right)$$

Solución:

$log_3\left(x^2-4\right) - log_3\left(x-2\right) = log_3\frac{\left(x^2-4\right)}{x-2}$

$log_3\frac{\left(x^2-4\right)}{x-2} = log_3\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x-2}$

$log_3\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x-2} = log_3\left(x+2\right)$

4.- Sabiendo que $loga2 = 0,30$ y $loga3 = 0,48$ calcular

$$a) log_a 18, \qquad b) log_a\frac{3}{8}$$

Solución:

$a) log_a 18$

$$log_a 18 = log_a 2.3^2 = log_a 2 + 2log_a 3$$

$$log_a 18 = 0,30 + 2\times 0,48 = 1,26$$

$b) log_a \frac{3}{8}$

$$log_a \frac{3}{8} = log_a 3 - log_a 8 = log_a 3 - log_a 2^3$$

$$log_a \frac{3}{8} = log_a 3 - 3 log_a 2 \quad = 0,48 - 3 \times 0,30 = -0,42$$

Dos logaritmos especiales:

1.- **Logaritmo decimal o logaritmo en base 10**
Es el logaritmo cuya base es el 10
Se acostumbra escribirlo sin especificar la base, es decir:

$$log_{10} x = log\, x$$

Por ser la base 10:

$$y = log\, x \text{ sí y solo sí } x = 10^y$$

$log\, x$ es el número al cual hay que elevar 10, para obtener el valor x

Ejemplos:

$$log\, 100 = 2, \quad \text{ya que } 10^2 = 100$$
$$log\, 0,1 = -1, \quad \text{ya que } 0,1 = 10^{-1}$$

2.- **Logaritmo natural o logaritmo en base *e***
La base de este logaritmo es el número irracional e
(recuerda que e = 2,7182818284590452353602874713527)

Este logaritmo se denomina **Logaritmo Neperiano**, y se acostumbra escribirlo

$$log_e x = ln\, x$$

Por ser la base e:

$$y = ln\, x \text{ sí y solo sí } x = e^y$$

Ecuaciones en las cuales aparecen logaritmos:

Para resolver ecuaciones en las cuales aparecen logaritmos, en algunos casos se puede usar la equivalencia entre las expresiones

$$y = log_a x \quad \text{y} \quad x = a^y$$

Para así transformar la ecuación dada en otra más sencilla de resolver

Ejemplos:

1.-Resolver $log_2 x = -3$

Solución: La expresión dada se puede sustituir por su equivalente escrita en forma exponencial

$$x = 2^{-3}$$

$$x = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

2.- Resolver $log_x 4 = \frac{1}{2}$

Sustituyendo la expresión por su equivalente exponencial $4 = x^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

Si en la ecuación aparecen varios logaritmos (todos de la misma base), es conveniente primero usar las propiedades de los logaritmos, para agrupar estos en uno solo y de esta manera poder resolverla como en el caso anterior, reemplazándola por su equivalente en forma exponencial

Ejemplo: Resolver $log\, x + log\,(x+3) = 1$

Solución: Comenzaremos por agrupar los logaritmos usando la propiedad conocida

$$\boxed{log_a x + log_a y = log_a xy}$$

$$log\, x(x+3) = 1$$

de aquí $x(x+3) = 10 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$ que da como soluciones $x = -5$ y $x = 2$.

Estas soluciones se deben probar sustituyendo en la ecuación original.
Para $x = -5$ sustituyendo en la ecuación

$\underbrace{log\,(-5)}_{\text{logaritmo de un número negativo}} + \underbrace{log\,(-5+3)}_{\text{logaritmo de un número negativo}} = 1$ Por lo tanto $x = -5$ no es solución de la ecuación.

Para $x = 2$ sustituyendo en la ecuación

$$log\,(2) + log\,(2+3) = 1 \Rightarrow log\,(2) + log\,(5) = 1 \Rightarrow log\,(2 \times 5) = log\,10 = 1$$

La igualdad se cumple, por lo que $x = 2$ es solución

Como acabamos de ver en el ejercicio anterior, a veces, al resolver una ecuación logarítmica como esta, obtenemos valores que no son soluciones de la ecuación, es por ello que siempre deben comprobarse las soluciones obtenidas, sustituyéndolas en la ecuación original

Ejemplo: Resolver $ln(x^2+2)-ln(x+1)=ln(2-x)$

Solución:
Reordenando $ln(x^2+2)=ln(x+1)+ln(2-x)$

Agrupando los logaritmos del lado derecho $ln(x^2+2)=ln(x+1)(2-x)$

Comparando argumentos $x^2+2=(x+1)(2-x)$

Desarrollando $2x^2-x=0 \Rightarrow \quad x=0, \quad x=\dfrac{1}{2}$

Prueba de las soluciones:
Para $x=0$
$ln(2)-\underbrace{ln(1)}_{0}=ln(2)$ como se cumple la igualdad, $x=0$ es solución de la ecuación
Para $x=1/2$

$$ln(\frac{1}{4}+2)-ln(\frac{1}{2}+1)=ln(2-\frac{1}{2})$$

$$ln\left(\frac{9}{4}\right)-ln\left(\frac{3}{2}\right)=ln\left(\frac{3}{2}\right),$$

$$ln\left(\frac{9}{4}\right)=ln\left(\frac{3}{2}\right)^2=2ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$2ln\left(\frac{3}{2}\right)=2ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

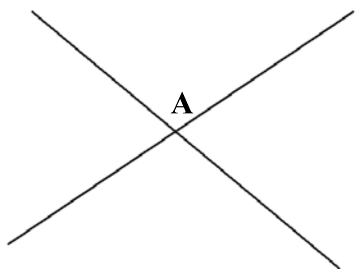
Nuevamente la igualdad se cumple, por lo tanto también es solución de la ecuación.

Geometría y Trigonometría

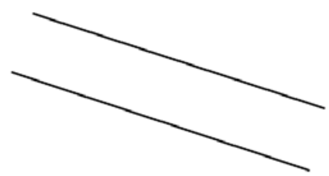
Rectas, Semirectas y Segmentos

Las **rectas** son ilimitadas, y dos puntos del plano determinan una única recta.

Por esta razón dos rectas distintas tienen a la sumo un punto común. Este punto, cuando existe, es el **punto de intersección**, o de corte, de ambas rectas.

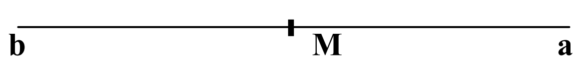


Las dos rectas se cortan en A



Las rectas no se cortan

Un punto sobre una recta nos determinan dos **semirectas**



Ma y Mb son las semirrectas que determina M.

Un **segmento** es la porción de recta comprendida entre dos puntos de ella.

Segmento A B

Elaborado por los profesores Concepción Ballester y Gerardo Ramírez

Dos segmentos son iguales si podemos superponerlos.
También podemos sumar segmentos consecutivos

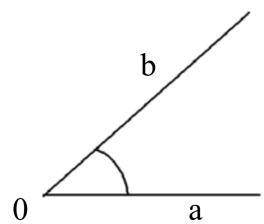
AB + BC = AC   MN + NP + PQ + QR = MR

Podemos obtener la medida de un segmento elegimos una unidad de medida. Las unidades más comunes son: metro, centímetro, pulgada, yarda, kilómetro, etc.

Ángulos

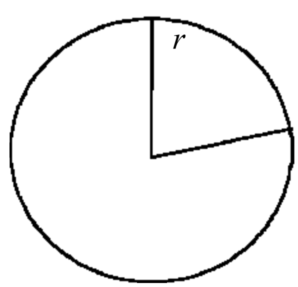
Un **ángulo** es la figura formada por dos semirrectas con un origen común.

0 es el vértice del ángulo a0b
0a es el lado inicial
0b es el lado final
Representaremos el ángulo en 0 por $\angle$ 0



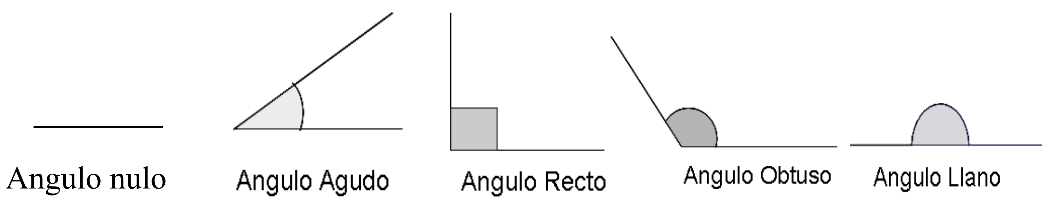
Los ángulos también se puede medir, las unidades de medida de ángulos suelen ser el grado y el radián
A un ángulo de un giro completo de una semirrecta alrededor de su origen, en el sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj) le asignamos la medida 360 grados, que escribimos 360^o.

Además del **grado** usaremos otra unidad de medida de ángulos, el **radián** que definimos como al giro completo en el sentido positivo la medida **2π** radianes
El **radian** es el ángulo limitado por dos radios de una circunferencia que cortan sobre la misma un arco de longitud igual al radio de la circunferencia



Clasificación de ángulos
En base a su medida, los ángulos se clasifican en:

NULOS: Si su medida es 0º
AGUDOS: Si su medida está entre 0º y 90º
RECTOS: Si su medida es 90º
OBTUSOS: Si su medida está comprendida entre 90º y 180º
LLANOS: Aquellos cuya medida es 180º



Es importante conocer la equivalencia entre las unidades de medida de ángulos **grados** y **radianes.** La equivalencia que existe entre ambos es $\pi \ radianes = 180^o$, de manera que

$$1 \ rad = \frac{180}{\pi} grados \qquad\qquad 1^o = \frac{\pi}{180} rad$$

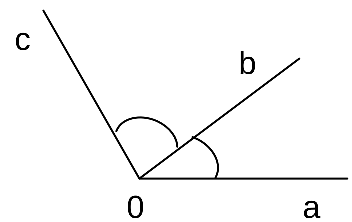
Ejemplos:

a) $30^o = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} rad$ b) $45^o = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} rad$

c) $60^o = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} rad$ d) $270^o = 270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2} rad$

e) $\frac{5\pi}{6} rad = \frac{5 \times 180}{6} = 150^o$ f) $\frac{7\pi}{4} rad = \frac{7 \times 180}{4} = 315^o$

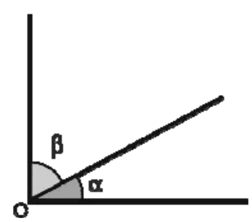
Definición: Dos ángulos se dicen **adyacentes** si el lado final de uno es lado inicial del otro.
En la figura, los ángulos **a0b** y **b0c** son ángulos adyacentes. El lado **0b** es el lado final de **a0b** y a la vez es el lado inicial de **b0c**.



Ángulos Complementarios y Suplementarios

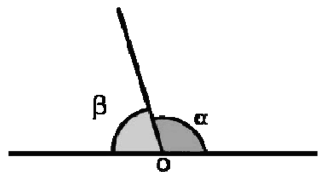
Dos ángulo **α** y **β** adyacentes se dicen **complementarios**, si su suma es igual a 90º (π/2 rad), es decir, si

$$\boxed{\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\ rad}$$

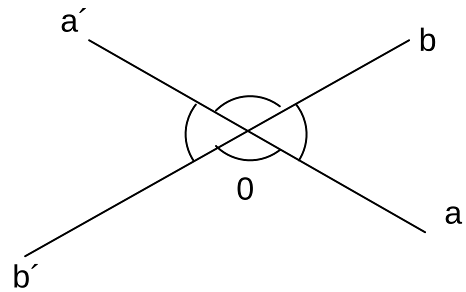


Dos ángulo **α** y **β** adyacentes se dicen **suplementarios**, si su suma es igual a 180º (π rad), es decir, si

$$\boxed{\alpha + \beta = \pi\ rad}$$

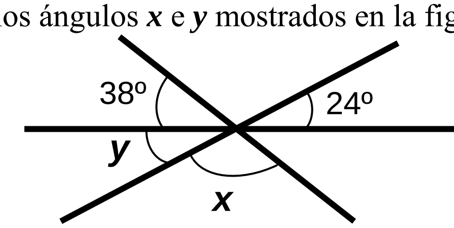


Dos ángulos se llaman **opuestos por el vértice** si los lados de uno son prolongación de los lados del otro. Los lados opuestos por el vértice son iguales.



En la figura, los ángulos **a0b** y **a´0b´** son opuestos por el vértice. También los ángulos **b0a´**y **a0b´** son opuestos por el vértice.

Ejemplo 1: Hallar los valores de los ángulos ***x*** e ***y*** mostrados en la figura



Solución: Como los ángulo opuestos por el vértice son iguales, entonces el ángulo ***y*** vale 24º. Por otra parte, la suma de los ángulos 38º, ***x*** y 24º es un ángulo llano, es decir, 180º por lo tanto,

$$x + 38^o + 24^o = 180^o \Rightarrow x = 180^o - 38^o - 24^o = 118^o$$

Ejemplo 2: Hallar el valor del ángulo que disminuido en su suplementario es igual al triple de su complementario

Solución: Si llamamos **α** al ángulo que estamos buscando, su suplementario es **180º–α** y su complementario **90º – α**, de acuerdo a lo establecido en el problema se tiene que

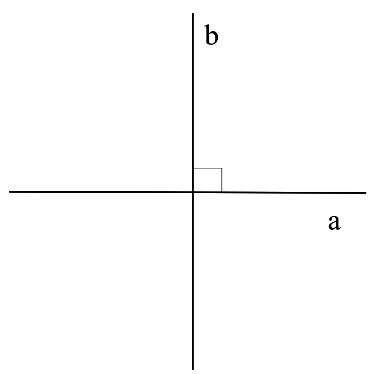
$$\alpha-\left(180^{o}-\alpha\right)=3\left(90^{o}-\alpha\right)$$

$$\alpha-180^{o}+\alpha=270^{o}-3\alpha$$

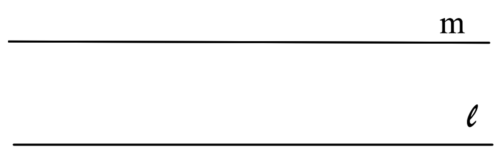
$$5\alpha=450^{o}\Rightarrow\alpha=90^{o}$$

Rectas Perpendiculares y Paralelas

Dos rectas son **perpendiculares** si se cortan y uno de los ángulos que forma es recto. En este caso, los cuatro ángulos son rectos. Escribimos $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$. Propiedad importante: dada una recta y un punto del plano, por el punto se puede trazar una única perpendicular a la recta dada.

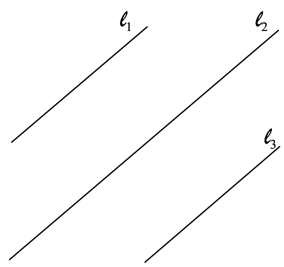


Dos rectas son **paralelas** si no se cortan (aunque se les prolongue) . En la gráfica ℓ y m son paralelas. Escribimos $\ell\,||\,m$ y el postulado de Euclides nos dice: por un punto del plano exterior a una recta dada se puede trazar una única paralela a ella.

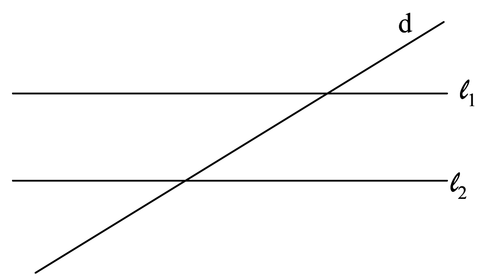


Si $\ell_1 \,||\, \ell_2$ se tiene que:

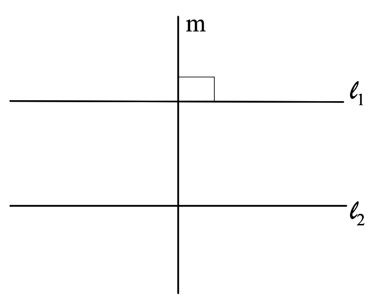
a) Toda recta paralela a una de ellas es paralela a la otra, es decir, si $\ell_1 \,||\, \ell_2$ y $\ell_3 \,||\, \ell_2$, entonces $\ell_3 \| \ell_1$



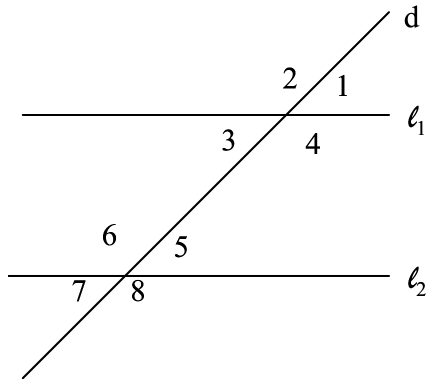
b) Toda recta que corta a una de ellas, corta a la otra, es decir, si d corta a ℓ_1 , entonces d corta a ℓ_2



c) Toda recta perpendicular a una de ellas es perpendicular a la otra. Esto es: si $m \perp \ell_1$, entonces $m \perp \ell_2$



Consideremos $\ell_1 \,||\, \ell_2$ y d secante, se forman los ocho ángulos indicados en la figura



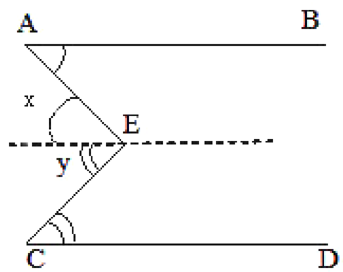
3 y 5 son ángulos **alternos internos**. También 4 y 6.
1 y 7 son ángulos **alternos externos**. También 2 y 8
1 y 5 son ángulos **correspondientes**. También 2 y 6, 3 y 7 , 4 y 8 lo son.
Dos ángulos alternos internos son iguales. También son iguales dos ángulos alternos externos y dos correspondientes. Debido a esto se tiene que

$$1 = 3 = 5 = 7$$
y
$$2 = 4 = 6 = 8$$

Si $1 = 43^\circ$ entonces $3 = 5 = 7 = 43^\circ$ y como $2 = 180^\circ - 1 = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ$ entonces $4 = 6 = 8 = 137^\circ$

Tres ó más rectas que pasan por un punto se dicen **concurrentes en dicho punto.**

Ejemplos de aplicaciones:
a) Si $AB \,||\, CD,\ \angle A = 35^\circ,\ \ \angle C = 45^\circ$ Calcular $\angle E$



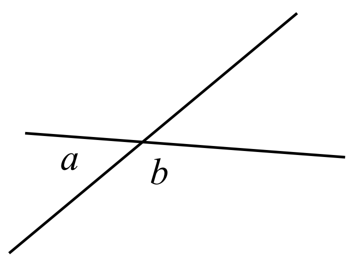
Para calcular el ángulo pedido trazamos por E una paralela a AB, con lo cual se forman los ángulos x e y

$x = \angle A = 35^\circ$ debido a que son ángulos alternos internos

$y = \angle C = 45^\circ$ debido a que son ángulos alternos internos

$\angle E = 35^\circ + 45^\circ = 80^\circ$

b) Si los ángulos a y b están en la relación $2 : 3$ hallar las medidas de a y b

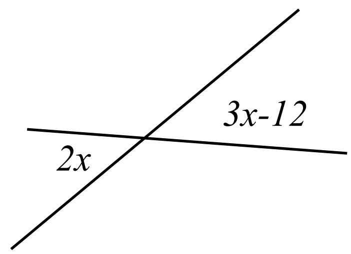


Solución: Sabemos que $a + b = 180^\circ$ y que $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, es decir $3a = 2b$, por lo tanto

$$3a = 2\left(180^o - a\right) \Rightarrow 3a = 360^o - 2a$$

$$5a = 360^o \Rightarrow a = 72^o \quad \text{y} \quad b = 180^o - 72^o = 108^o$$

c) Hallar el valor de ***x*** si estamos en la situación de la figura



Solución:
Como los dos ángulos son opuestos por el vértice, son iguales, por lo tanto

$$2x = 3x - 12$$

$$x = 12$$

Triángulos

Tres puntos no alineados de un plano ***A***, ***B*** y ***C*** determinan un **triángulo *ABC***

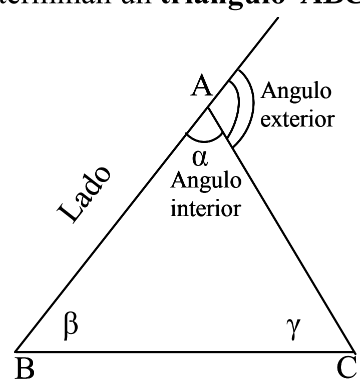
Todo triángulo posee:

3 vértices, los puntos ***A***, ***B*** y ***C***

3 lados, los segmentos ***AB***, ***BC*** y ***AC***

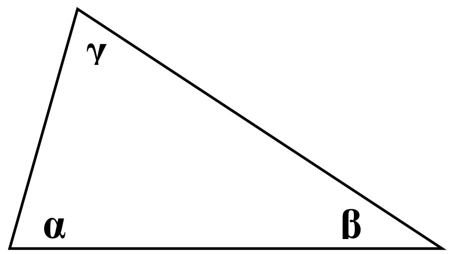
3 ángulos interiores α, β y γ

3 ángulos exteriores

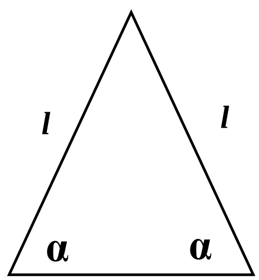


Clasificación de triángulos:

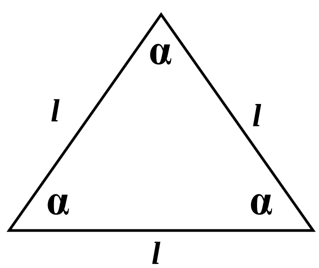
Un triángulo es **escaleno** si sus tres lados son distintos. En este caso los ángulos también lo son



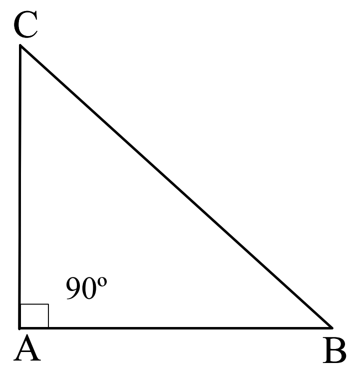
Un triángulo es **isósceles** si tiene dos lados iguales. En este caso los ángulos opuestos a los lados iguales, también son iguales



Un triángulo es **equilátero** si tiene sus tres lados iguales. En este caso sus tres ángulos son iguales y miden 60º cada uno.



Un triángulo se llama **rectángulo** si uno de sus ángulos es recto (90º).



Un triángulo se llama **acutángulo** si sus tres ángulos son agudos.

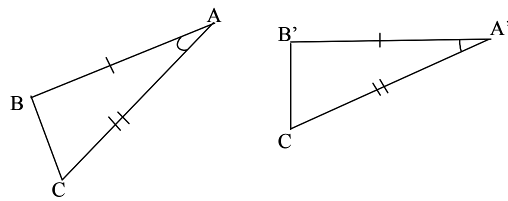
Suma de los ángulos de un triángulo

En todo triángulo se verifica que la suma de sus ángulo interiores es igual a 180º (π radianes)

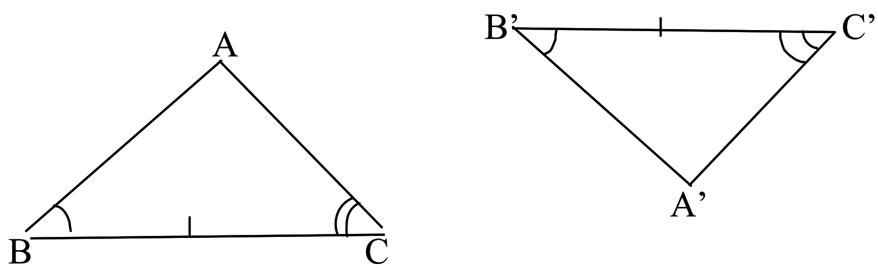
Congruencia de Triángulos.

Dos triángulos son **congruentes** si se pueden superponer.
Para determinar si dos triángulos son congruentes verificamos si se cumple alguna de las siguientes condiciones

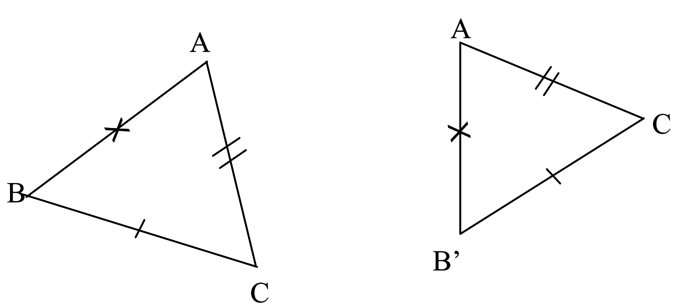
I. Dos triángulos que tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados iguales son congruentes.



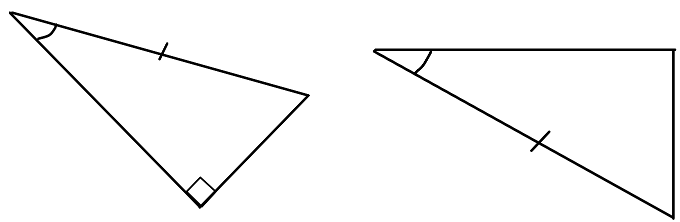
II. Dos triángulos que tienen un lado igual comprendido entre dos ángulos iguales son congruentes



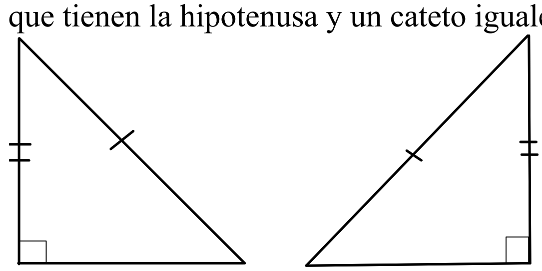
III. Dos triángulos que tienen los tres lados iguales son congruentes.



Existen otras dos condiciones para el caso específico de los **triángulos rectángulos**:
Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen un ángulo agudo y la hipotenusa iguales.



Dos triángulos rectángulos que tienen la hipotenusa y un cateto iguales son congruentes.

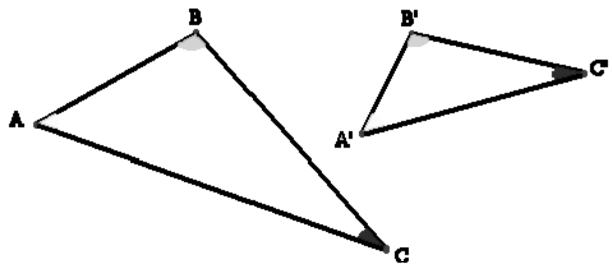


Si dos triángulos ABC y MNL son congruentes escribimos $ABC \cong MNL$.

Semejanza de triángulos

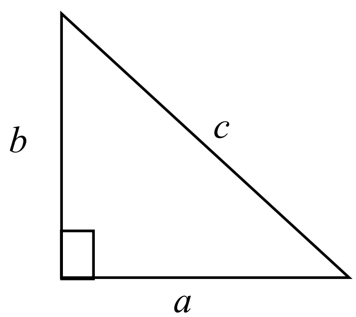
Dos triángulos se dicen semejantes, si los ángulos internos de uno son respectivamente iguales a los ángulos internos del otro.
Otra forma de expresar esto es diciendo que los triángulos ABC y A´B´C´ son semejantes si se verifica que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$$



Teorema de Pitágoras

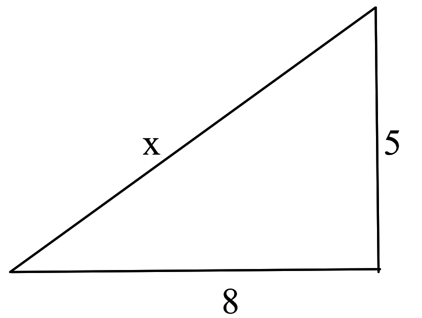
Un teorema importante que relaciona los lados de un triángulo rectángulo es el **Teorema de Pitágoras**, el cual establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Ejemplos de aplicación:

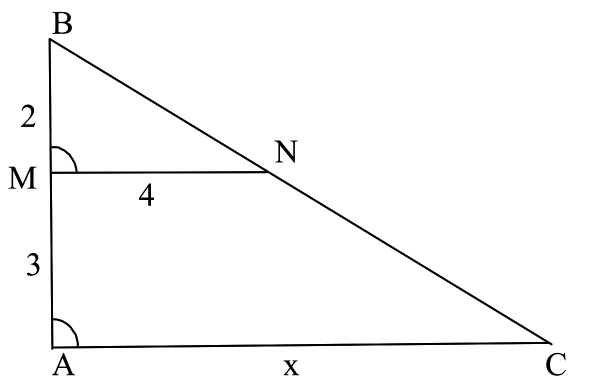
a) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 y 8 unidades. Calcular la hipotenusa.



Solución:

De acuerdo con el Teorema de Pitágoras se tiene que $x^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$
Por lo tanto la hipotenusa mide $x = \sqrt{89}$

b) En el triángulo $ABC,\ MN \parallel AC,\ BM = AM = 3$ y $MN = 4$. Calcular $x = AC$
Solución:
La situación es la que se muestra en la figura. Como $MN \parallel AC$ entonces $\angle M = \angle A$ por ser correspondientes, por lo tanto los triángulos ***BAC*** y ***BMN*** son semejantes pues tienen dos ángulos iguales, $\angle B$ que es común y $\angle M = \angle A$.

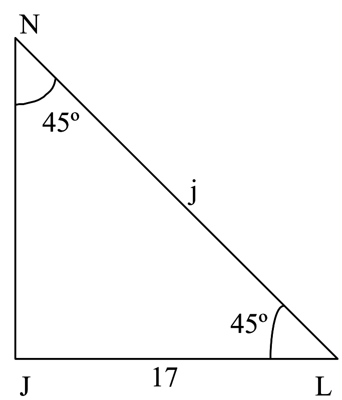


También sabemos que $BA = 2 + 3 = 5$ y que por semejanza, los lados de los dos triángulos son proporcionales.

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{x} \text{de donde } x = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

c) Dado el triángulo ***NJL*** mostrado en la figura, hallar el valor del lado **j**

Solución:



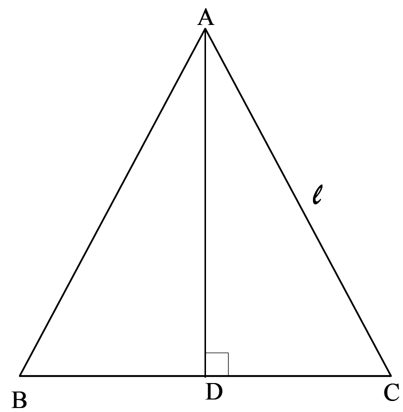
El triángulo es isósceles, pues tiene dos ángulos iguales, por lo tanto

$$JN = JL = 17$$

Como $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ también es rectángulo
Aplicando el Teorema de Pitágoras

$$j^2 = 17^2 + 17^2 = 2 \cdot 17^2$$
$$j = 17\sqrt{2}$$

d) Dado el triángulo ***ABC***, equilátero, de lado ℓ, calcular su altura ***AD***.



Solución:

Como el triángulo es equilátero, se verifica que $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

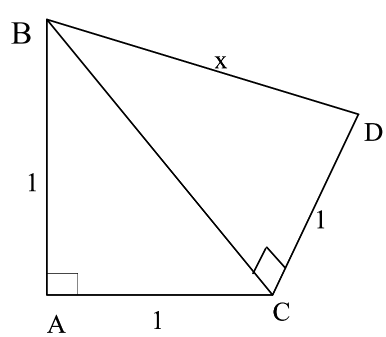
Debido a que $AB = AC$, el vértice ***A*** está sobre una perpendicular a BC, trazada por su punto medio, es decir $BC = DC = \dfrac{\ell}{2}$. Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo ADC

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$\ell^2 = AD^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow AD^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$AD = \frac{\sqrt{3}\ell}{2}$$

e) Para la figura mostrada, calcular el valor de **x**



Solución:

El triángulo ***ABC*** es rectángulo, por lo tanto utilizando el Teorema de Pitágoras se puede calcular la longitud del lado ***BC***.

$$BC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Por otra parte, el triángulo ***BCD*** también es rectángulo, siendo sus catetos de longitudes 1 y $\sqrt{2}$, Aplicando de nuevo el Teorema se tiene

$$x = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

f) Si los ángulos de un triángulo están en la relación $2 : 3 : 4$ ¿qué tipo de triángulo es?

Solución:

Sean α, β y γ los ángulos internos del triángulo, se cumple que

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = x$$

$$\alpha = 2x, \quad \beta = 3x \quad \text{y} \quad \gamma = 4x$$

Como los ángulos son distintos, los lados también, por lo tanto el triángulo es **escaleno.**
Además, sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, por lo tanto

$$2x + 3x + 4x = 180^\circ$$

$$9x = 180^\circ$$

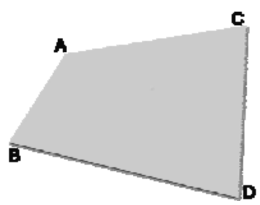
$$x = 20^\circ$$

$$\alpha = 40^\circ \qquad \beta = 60^\circ \qquad \gamma = 80^\circ$$

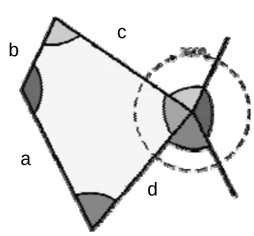
El triángulo es **acutángulo**, y **escaleno**.

Cuadriláteros

Se denomina cuadrilátero a un polígono compuesto por cuatro ángulos y cuatro lados. Al igual que en los triángulos, los puntos de intersección de los lados se llaman vértices



La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360º = 2π radianes

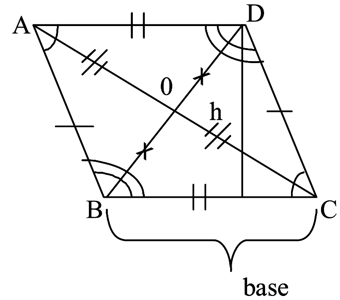


Tipos especiales de cuadriláteros

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero que tiene sus lados paralelos dos a dos

$$AB \parallel CD \text{ y } BC \parallel AD$$

Propiedades de los paralelogramos:

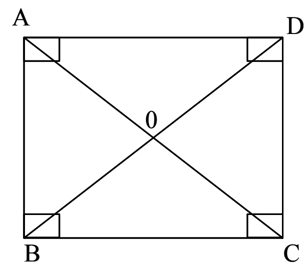


Los lados opuestos son iguales y paralelos.
Los ángulos opuestos son iguales.
Dos ángulos consecutivos son suplementarios.
Las diagonales se cortan en su punto medio.
$A0 = 0C$ y $B0 = 0D$

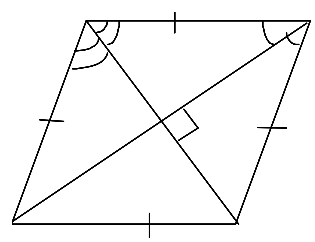
Un **rectángulo** es un paralelogramo
Que tiene sus ángulos rectos

Además, las longitudes de sus diagonales son iguales

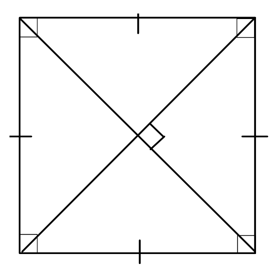
$$AC = BD$$



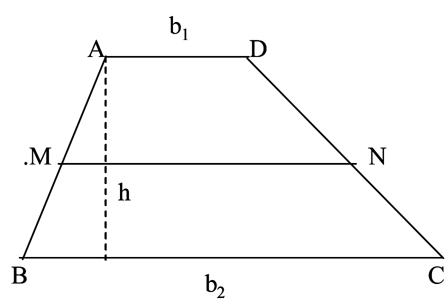
Un **rombo** es un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos iguales.
Además de las propiedades de los paralelogramos, tiene las siguientes:
Todos sus lados son iguales.
Las diagonales son perpendiculares.



Un **cuadrado** es a la vez un rombo y un rectángulo.
Tiene todas las propiedades de los rectángulos y los rombos.



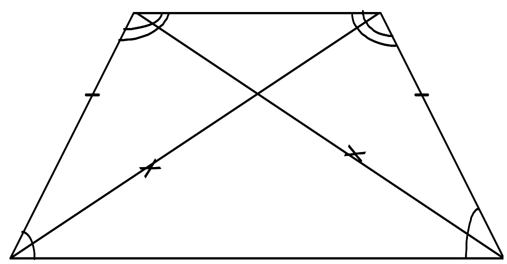
Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos.
Sus bases, b_1 y b_2 son



esos lados paralelos.
La altura h, es la longitud del segmento perpendicular a la bases.
Si M y N son los puntos medios de los lados no paralelos, se verifica que

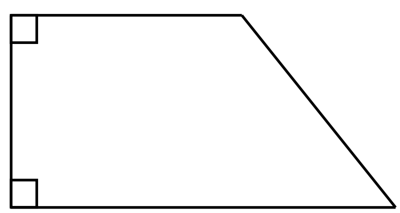
$$MN = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

Un trapecio con los ángulos de la base iguales se llama **isósceles**
Los lados no paralelos son iguales y las diagonales también



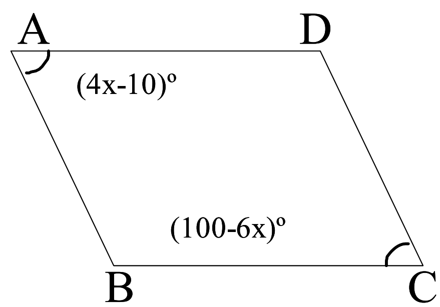
Trapecio Isósceles

Un trapecio que tiene un ángulo de la base recto se llama **trapecio recto**



Ejemplos:

a) En el paralelogramo ***ABCD***, $\angle A = 4x - 10$ y $\angle C = 100 - 6x$
Calcular los ángulos del mismo



Solución:

Los ángulos A y C son opuestos, por lo tanto $\angle A = \angle C$
En base a esto se tiene que

$$4x - 10 = 100 - 6x$$
$$10x = 110$$
$$x = 11^o$$

$$\angle A = \angle C = 4 \cdot 11 - 10 = 44 - 10 = 34$$
y
$$\angle B = \angle D = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$$

b) Los ángulos de un cuadrilátero $ABCD$ están en la relación $1 : 3 : 5 : 6$. Hallar las medidas de tales ángulos.

Solución:
La hipótesis nos dice

$$\frac{\angle A}{1}=\frac{\angle B}{3}=\frac{\angle C}{5}=\frac{\angle D}{6}=x, \text{ entonces:}$$

$$\angle A = x;\ \angle B = 3x;\ \angle C = 5x;\ \angle D = 6x$$

Como la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°, tenemos:

$$x+3x+5x+6x=360^{\circ}$$

$$15x=360^{\circ}$$

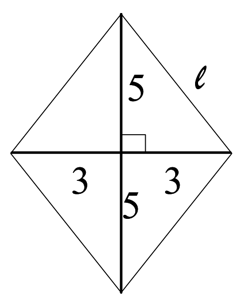
$$x=24^{\circ}$$

por lo tanto

$$\angle A = 24^{\circ} \quad \angle B = 3\left(24^{\circ}\right)=72^{\circ} \quad \angle C = 5\left(24^{\circ}\right)=120^{\circ} \quad \angle D = 6\left(24^{\circ}\right)=144^{\circ}$$

c) Si las diagonales de un rombo miden 6 y 10, hallar la medida del lado ℓ

Solución:
Sabemos que las diagonales de un rombo son perpendiculares.



El lado del rombo es la hipotenusa de cualquiera de los triángulos rectángulos determinados por las diagonales. Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene

$$\ell^2 = 3^2+5^2 = 9+25 = 34$$

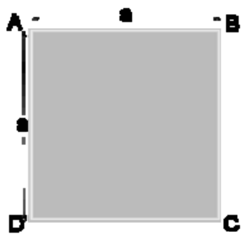
$$\ell = \sqrt{34}$$

Perímetro y área de algunos polígonos

El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de los lados. Lo llamamos **P**
El área es la medida de la superficie del polígono. La llamamos **A**

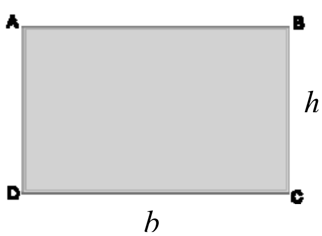
A continuación se presentan las fórmulas para calcular área y perímetro de los polígonos más comunes.

Cuadrado de lado ***a***



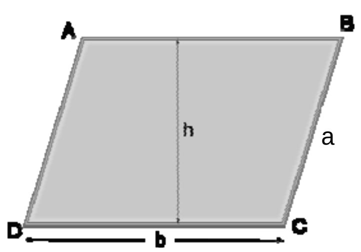
$$A = a^2$$
$$P = 4a$$

Rectángulo



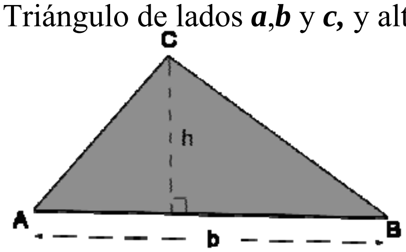
$$A = bh, \qquad P = 2b + 2h$$

Paralelogramo de lados ***a*** y ***b***, y altura ***h*** correspondiente a ***b***



$$A = bh, \qquad P = 2a + 2b$$

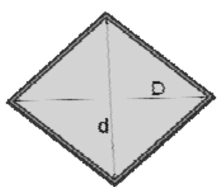
Triángulo de lados ***a***,***b*** y ***c,*** y altura ***h***, correspondiente a ***b***



a c

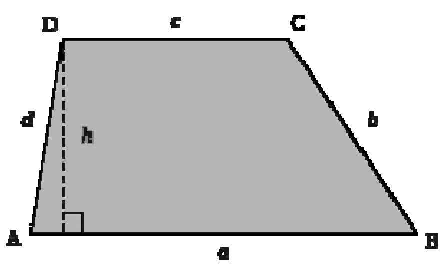
$$A=\frac{1}{2}bh,\qquad P=a+b+c$$

Rombo de lado ℓ y diagonales $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{d}$



$$A=\frac{dD}{2},\quad P=4\ell$$

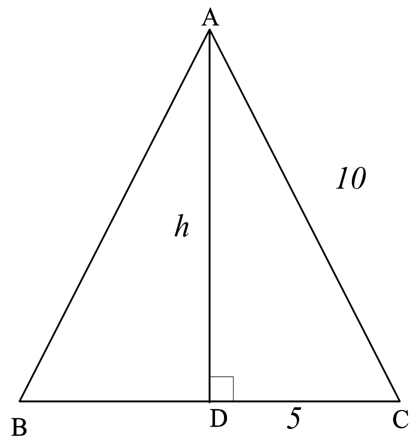
Trapecio de bases $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ y altura $\boldsymbol{h}$



$$A=\frac{(a+c)}{2}h,\quad P=a+b+c+d$$

Ejemplos:

a) Hallar el área de un triángulo equilátero de lado 10



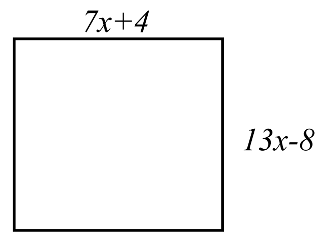
Solución:
El triángulo es rectángulo en D, por lo tanto

$$10^2 = h^2 + 5^2$$
$$h^2 = 100 - 25 = 75 = 3 \cdot 5^2$$
$$h = 5\sqrt{3}$$
$$A = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$

b) Si los lados consecutivos de un cuadrado se pueden representar en términos de x como $7x+4$ y $13x-8$, calcular el área del cuadrado.

Solución:
Como se trata de un cuadrado sus lados son iguales, por lo tanto

$$7x+4=13x-8$$
$$4+8=13x-7x$$
$$12=6x$$
$$x=\frac{12}{6}=2$$

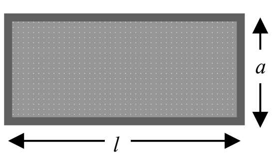


El lado de cuadrado es $7(2)+2=18$ y el área $A=(18)^2=324$

c) Un campo rectangular es 20 m más largo que ancho y está cercado con 100 m de alambre ¿Cuáles son las dimensiones del campo en metros?

Solución:

Si ***l*** es el largo del terreno y ***a*** su ancho, como se muestra en la figura, se tiene de acuerdo al enunciado del problema que



$$l=a+20$$

Por otra parte, debido a que el perímetro del terreno son 100 m, se verifica que

$$P=2l+2a$$

Sustituyendo en la última ecuación el valor de P y $l = a + 20$

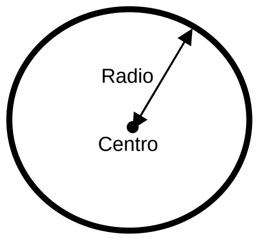
$$2(a+20)+2a=100$$

Despejando
$$4a+40=100 \Rightarrow a=\frac{60}{4}=15m$$
$$l=a+20 \Rightarrow l=15+20=35m$$

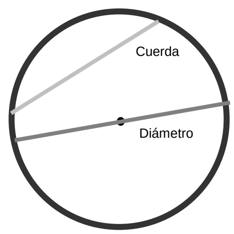
Las dimensiones del terreno son largo 35 m y ancho 15 m

Circunferencia y círculo

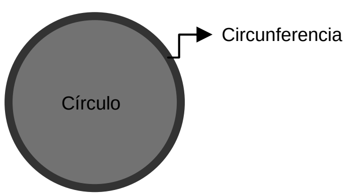
Se denomina **circunferencia** a la línea curva formada por todos los puntos del plano que equidistan (se encuentran a la misma distancia) de un punto fijo. Dicho punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro se llama radio.



Se denomina **cuerda** a la recta que une dos puntos sobre la circunferencia. Un **diámetro** es una cuerda que pasa por el centro



Llamamos **círculo** al conjunto de puntos situados sobre la circunferencia y en el interior de la misma

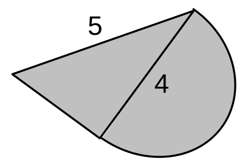


$$Perímetro\ \ de\ la\ circunferencia: P = 2\pi r$$

$$Área\ del\ círculo: A = \pi r^2,\ r = radio\ de\ la\ circunferencia$$

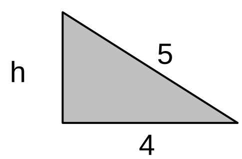
Ejemplos

a) La figura representa un triángulo rectángulo con un semicírculo pegado a uno de sus lados. ¿Cuánto vale el área de dicha figura?



Solución:

El área de la figura se calcula sumando las áreas del triángulo rectángulo y del semicírculo. Para el cálculo del área del triángulo necesitamos conocer la longitud del otro cateto, por lo que usaremos el Teorema de Pitágoras para calcularla



$$(5)^2 = (4)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

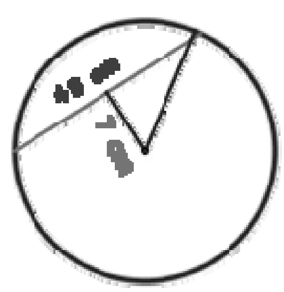
Conocido el valor de *h*, el área del triángulo es $A_T = \frac{bh}{2} = \frac{4(3)}{2} = \underline{6}$

Por otra parte, el área del semicírculo es $A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi (2)^2}{2} = \underline{2\pi}$

El área total de la figura es $A = 6 + 2\pi$

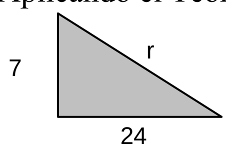
b) En una circunferencia, se tiene que una cuerda de 48 cm dista 7 cm del centro. Hallar el área del círculo

Solución:



El centro de la circunferencia, un extremo de la cuerda y el punto medio de la misma forman un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 24 cm y 7 cm y cuya hipotenusa es el radio de la circunferencia.

Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene



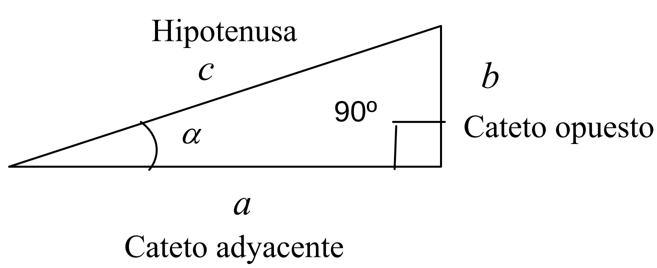
$$r^2 = (24)^2 + (7)^2 \Rightarrow r^2 = 576 + 49 = 625$$

El área del círculo es $A = \pi r^2 = 625\pi$

Trigonometría

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Consideremos el triángulo rectángulo mostrado en la figura



Se definen las siguientes razones trigonométricas para el ángulo agudo α

a) *Seno de* α $(sen\alpha)$:
Es la razón entre el cateto opuesto al ángulo, y la hipotenusa del triángulo

$$sen\alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

b) *Coseno de* α $(cos\alpha)$:
Es la razón entre el cateto adyacente al ángulo, y la hipotenusa del triángulo

$$cos\alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

c) *Tangente de* α $(tg\alpha)$:
Es la razón entre el cateto opuesto al ángulo, y el cateto adyacente al mismo

$$tg\alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} = \frac{b}{a}$$

Se puede verificar que $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$

d) *Cotangente de* α $(ctg\alpha)$:

Razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto al ángulo

$$ctg\alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto} = \frac{a}{b}$$

Además $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}$

e) *Secante de* α $(sec\alpha)$:
Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo

$$sec\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente} = \frac{c}{a}$$

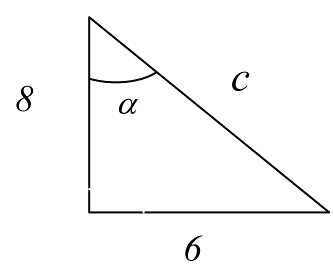
$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$$

f) *Cosecante de* α $(csec\alpha)$:
Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo

$$csec\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto} = \frac{c}{b}$$

$$csec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$

Ejemplo: Determinar las seis razones trigonométricas del ángulo α mostrado en la figura



Solución:

Primero calcularemos el valor de la hipotenusa *c*, haciendo uso del Teorema de Pitágoras

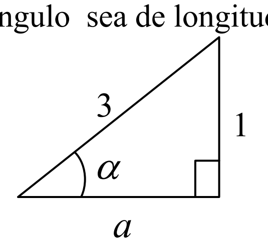
$$c = \sqrt{6^2 + 8^2}$$
$$c = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Una vez conocidos todos los lados podemos calcular las razones trigonométricas pedidas

$sen\alpha$	$\frac{CO}{H}$	$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$
$cos\alpha$	$\frac{CA}{H}$	$\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$
$tg\alpha$	$\frac{sen\alpha}{cos\alpha}$	$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$
$ctg\alpha$	$\frac{1}{tg\alpha}$	$\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$
$sec\alpha$	$\frac{1}{cos\alpha}$	$\frac{5}{4}$
$cosec\alpha$	$\frac{1}{sen\alpha}$	$\frac{5}{3}$

Ejemplo: Si α es un ángulo agudo, y $sen\alpha=\frac{1}{3}$, hallar el valor de $tg\alpha$

Solución: Recordando que $sen\alpha=\frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$, podemos construir un triángulo rectángulo en el cual el cateto opuesto al ángulo sea de longitud 1, y la hipotenusa, sea de longitud 3



El cateto adyacente a, lo podemos calcular usando el Teorema de Pitágoras

$$a=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{9-1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Una vez conocidos todos los lados del triángulo, podemos calcular la tangente del ángulo que nos piden

$$tg\alpha=\frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

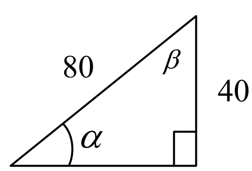
Razones trigonométricas de ángulos comunes

A continuación se presentan el seno, coseno y tangente de los ángulos más comunes

Angulo en grados	Angulo en radianes	Seno	Coseno	Tangente
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	No definida

Ejemplo:

Para el triángulo mostrado, calcular los valores de los ángulos indicados



Solución:

Conocidos la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo α podemos plantear

$$sen\alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto α es el ángulo agudo cuyo seno es 1/2 , es decir,

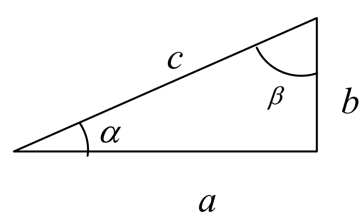
$$\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6} rad$$

Para calcular al ángulo β recordemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º, por lo que

$$\alpha + \beta + 90º = 180º \Rightarrow \beta = 180º - 90º - 30º = 60^\circ = \frac{\pi}{3} rad$$

Identidades trigonométricas

Consideremos el triángulo



De acuerdo al Teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$

Dividiendo toda la ecuación por c^2 se tiene $1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$

pero $\frac{b}{c} = sen\alpha, \qquad \frac{a}{c} = cos\alpha$

por lo tanto al sustituir en la ecuación anterior obtenemos $\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad (\mathrm{I})}$

Esta identidad se conoce con el nombre de Identidad fundamental de la trigonometría, y relaciona los valores del seno y el coseno de cualquier ángulo

Si en dicha identidad dividimos todo por $sen^2\alpha$

$$\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha}+\frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{1}{sen^2\alpha}$$

$$1+\left(\frac{cos\alpha}{sen\alpha}\right)^2=\left(\frac{1}{sen\alpha}\right)^2$$

$$\boxed{1+ctg^2\alpha=cosec^2\alpha} \quad \text{(II)}$$

Si en la identidad (I) dividimos todo por $cos^2\alpha$

$$\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}+\frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{1}{cos^2\alpha}$$

$$\left(\frac{sen\alpha}{cos\alpha}\right)^2+1=\left(\frac{1}{cos\alpha}\right)^2$$

$$\boxed{tg^2\alpha+1=sec^2\alpha} \quad \text{(III)}$$

Otras identidades trigonométricas:

Seno de la suma o diferencia de ángulos $\boxed{sen(a\pm b)=sena.cosb\pm senb.cosa}$ (IV)

Coseno de la suma o diferencia de ángulos $\boxed{cos(a\pm b)=cosa.cosb\mp sena.senb}$ (V)

Si en la identidad (IV) hacemos *b* = *a* obtenemos una fórmula para el seno del ángulo doble

$$\boxed{sen2a=2sena.\cos a} \quad \text{(VI)}$$

Haciendo lo mismo en la identidad (V), obtenemos una fórmula para el coseno del ángulo doble

$$\boxed{cos2a=cos^2a-sen^2a} \quad \text{(VII)}$$

Ejemplo: Calcular el seno de 15º

Solución: Conocidos el seno y coseno de 45º y de 30º y haciendo uso de la identidad (IV)

$$sen(15º) = sen(45º - 30º) = sen45º\,cos30º \pm sen30º\,cos45º$$

$$sen15^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

Ejemplo: Demostrar que $\left(1 - \frac{1}{cosec\theta}\right)^2 + cos^2\theta = 2\left(1 - sen\theta\right)$

Solución:

Primeramente desarrollamos el binomio al cuadrado en el lado izquierdo

$$\left(1 - \frac{1}{cosec\theta}\right)^2 + cos^2\theta = 1 - \frac{2}{cosec\theta} + \frac{1}{cosec^2\theta} + cos^2\theta$$

Recordando que $\frac{1}{cosec\theta} = sen\theta$, la expresión anterior se puede escribir como

$$1 - \frac{2}{cosec\theta} + \frac{1}{cosec^2\theta} + cos^2\theta = 1 - 2sen\theta + sen^2\theta + cos^2\theta$$

Usando la identidad (I) $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$

$$1 - 2sen\theta + 1$$

y de aquí se obtiene lo que queríamos demostrar

$$\boxed{2\left(1 - sen\theta\right)}$$

Ejemplo:

Demostrar que $\frac{tg\theta sec\theta}{1 + tg^2\theta} = sen\theta$

Solución:

Recordando la identidad (III) $1+tg^2\theta = sec^2\theta$, escribimos la expresión del lado izquierdo

como $\dfrac{tg\theta sec\theta}{sec^2\theta}$, que simplificando nos queda $\dfrac{tg\theta}{sec\theta}$, pero $tg\theta = \dfrac{sen\theta}{cos\theta}$ y $sec\theta = \dfrac{1}{cos\theta}$ de manera que al sustituir $\dfrac{tg\theta}{sec\theta} = \dfrac{\dfrac{sen\theta}{cos\theta}}{\dfrac{1}{cos\theta}} = sen\theta$

Ecuaciones que incluyen razones trigonométricas:

Ejemplo: Resolver la ecuación $2cosx-1=0$ con $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

Solución : Despejando en la ecuación $cosx = \dfrac{1}{2}$

de manera que x es el ángulo comprendido entre 0º y 90º cuyo coseno es 1/2 , este ángulo es 60º , que es igual a π/3 radianes.

Ejemplo: Resolver $2sen^2x - senx = 1$ con $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

Solución:

Si hacemos *t = senx,* la expresión la podemos transformar en $2t^2 - t - 1 = 0$, la cual podemos resolver aplicando la fórmula

$$t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$1)\ senx = 1 \qquad 2)\ senx = -\frac{1}{2}$$

por lo tanto tenemos

De la primera expresión tenemos que el ángulo x que estamos buscando es el ángulo comprendido entre 0º y 90º cuyo seno vale 1. Este ángulo es 90º, por lo tanto esta es una primera solución. De la expresión 2) tenemos que x sería el ángulo entre 0º y 90º cuyo seno es -1/2 , pero para ningún ángulo comprendido entre estos dos valores el seno es negativo, por lo que no hay ningún valor que cumpla con la expresión 2. En este caso la única solución de la ecuación dada es x = 90º, que es igual a π/2 radianes.

Ejemplo: Si $sen\,x = 0{,}707$ ¿Cuánto vale $(sen\,x)(cos\,x)(tan\,x)$?

Solución:

Sabemos que $tan\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$, por lo tanto

$$(sen\,x)(cos\,x)(tan\,x) = (sen\,x)cos\,x \cdot \frac{sen\,x}{cos\,x} = sen^2\,x = (0{,}707)^2 = 0{,}499$$

Ejemplo:

Simplificar la expresión $sen^2\,x\,cos^2\,x + cos^4\,x$

Solución:

$sen^2\,x\,cos^2\,x + cos^4\,x = cos^2\,x\left(sen^2\,x + cos^2\,x\right) = cos^2\,x$ ya que

$sen^2\,x + cos^2\,x = 1$

Ejemplo: Dada la ecuación $8\,sen^2\,x + 2\,cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3 = 0$, hallar el valor de $sen\,x$

Solución:

Como $cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos\,x\,cos\frac{\pi}{2} - sen\,x\,sen\frac{\pi}{2} = -sen\,x$, sustituyendo en la ecuación se tiene $8\,sen^2\,x - 2\,sen\,x - 3 = 0$ y resolviendo esta ecuación de segundo grado en $senx$

$$sen\,x = \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{16} = \frac{2 \pm 10}{16} \Rightarrow \begin{cases} senx = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4} \\ senx = \dfrac{-8}{16} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

A continuación se presentan 25 ejercicios resueltos, con explicaciones, así como también 45 ejercicios propuestos para ser resueltos por el estudiante. En el desarrollo de los ejercicios resueltos encontrará conceptos, propiedades matemáticas, evaluación de expresiones algebraicas, operaciones con distintas fracciones, simplificaciones algebraicas, empleo de razones trigonométricas y figuras, éstas últimas en muchos casos ilustran con más claridad los ejercicios.

EJERCICIOS RESUELTOS

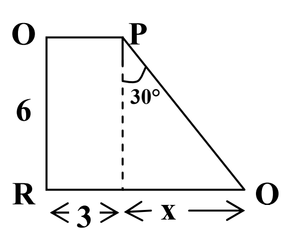
1. El área del cuadrilátero **OPQR** mostrado en la figura es:

a) $18 + 18\sqrt{3}$

b) $18 + 6\sqrt{2}$

c) $18 + 18\sqrt{2}$

d) $18 + 6\sqrt{3}$



SOLUCIÓN

El área del cuadrilátero OPQR es la suma del área de un rectángulo más el área de un triángulo.
El área del rectángulo es

$$\mathbf{A_R = (base)(altura) = (3)(6) = 18}$$

El triángulo tiene altura 6 y su base es **x.** Para calcular su área se debe primero calcular el valor de x. Para ello se puede usar la relación

$$\tan(30^o) = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 6\tan(30^o) = 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Conocido el valor de **x**, el área del triángulo es

$A_T = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)(6) = \frac{18}{\sqrt{3}}$, que al racionalizar será $A_T = 6\sqrt{3}$

Luego el área del cuadrilátero es

$$A = A_R + A_T = 18 + 6\sqrt{3}$$

La respuesta correcta es la opción d)

OBSERVACIÓN

En la solución del problema anterior no solo se utilizan los conceptos de área de un triángulo y de un rectángulo, sino que además se debe hacer uso de la razón trigonométrica tangente de un ángulo.

2. Al simplificar la expresión $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} - \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$ se obtiene

a) **2**
b) **2x + 2**
c) **4**
d) **x + 4**

SOLUCION: Justificación

$$\frac{x^2+x-6}{x-2}-\frac{x^2+x-2}{x+2}=\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}-\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}$$ Factorizando los numeradores de ambos términos

$$=(x+3)-(x-1)$$ Simplificando, suponiendo que $x \neq \pm 2$

$$= x+3-x+1 = 4$$ Desarrollando y agrupando

La respuesta correcta es la opción c)

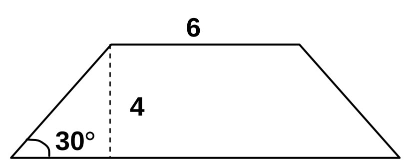
3. ¿Cuál es el perímetro del trapecio isósceles mostrado?

a) $28+8\sqrt{3}$

b) $36+4\sqrt{3}$

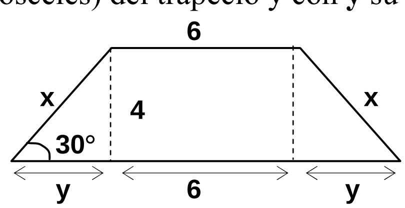
c) $16+4\sqrt{3}$

d) $24+8\sqrt{3}$



SOLUCIÓN

Puede facilitar la solución del problema denotar, en la figura, con **x** la longitud de los lados laterales (iguales por ser isósceles) del trapecio y con **y** su proyección no conocida sobre la base



El perímetro del trapecio es **P = 2x + 2y +2(6)**.

Para determinar **x** e **y** se usan las relaciones: $\mathbf{sen(30°) = \frac{4}{x}}$ y $\mathbf{tan(30°) = \frac{4}{y}}$

Despejando **x** e **y** y sustituyendo en **P** se tiene

$$\mathbf{P = \frac{8}{sen(30°)} + \frac{8}{tan(30°)} + 12 = 8(2+\sqrt{3}) + 12 = 28 + 8\sqrt{3}}$$

La respuesta correcta es la opción a)

OBSERVACIÓN

Para resolver el problema se debe conocer no sólo el concepto de perímetro sino además integrar éste con las razones trigonométricas seno y tangente de un ángulo.

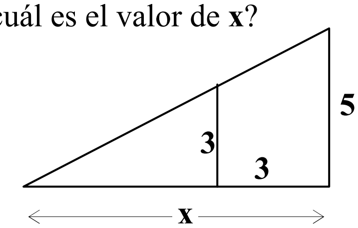
4. Para el triángulo de la figura, ¿cuál es el valor de **x**?

a) **7**

b) $\mathbf{\frac{15}{2}}$

c) **5**

d) $\mathbf{\frac{15}{8}}$



SOLUCION:

Para hallar el valor de **x** pedido se establece una relación de semejanza entre el triángulo grande y el triángulo pequeño. Así se puede plantear que

$$\mathbf{\frac{x}{5} = \frac{x-3}{3}}, \text{ de aquí } \quad \mathbf{3x = 5(x-3)}$$

Desarrollando y despejando **x**

$$\mathbf{3x = 5x - 15 \;\Rightarrow\; 2x = 15 \;\Rightarrow\; x = \frac{15}{2}}$$

La respuesta correcta es la opción b)

OBSERVACION: Los conceptos involucrados en la solución del problema son semejanza de triángulos y solución de una ecuación lineal.

5. ¿Cuál es la solución de la ecuación $\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=1+\frac{x-2}{5}}$?

- **a)** $\mathbf{-13/2}$
- **b)** $\mathbf{-11/2}$
- **c)** $\mathbf{3/4}$
- **d)** $\mathbf{27/4}$

SOLUCIÓN

El mínimo común múltiplo de los denominadores es **(2)(3)(5) = 30.** Multiplicando la ecuación por dicho **mcm**, se obtiene $\mathbf{15+10x=30+6(x-2)}$

Despejando **x**

$$\mathbf{10x-6x=30-12-15 \quad\Rightarrow\quad 4x=3 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3}{4}}$$

La respuesta correcta es la opción c)

6. Una factorización del polinomio $\mathbf{P(x)=2x^2-11x+5}$ es

- **a)** $\mathbf{(x-5)(x-\frac{1}{2})}$
- **b)** $\mathbf{(2x-5)(x-\frac{1}{2})}$
- **c)** $\mathbf{(2x-1)(x-5)}$
- **d)** $\mathbf{(x+5)(x+\frac{1}{2})}$

SOLUCIÓN

Para factorizar de P(x) primero se procede a buscar sus raíces, es decir, a resolver la ecuación de segundo grado $\mathbf{2x^2-11x+5=0}$

Para esto se usa la fórmula $\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$, con **a = 2**, **b = -11** y **c = 5**

$$\mathbf{x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4(2)(5)}}{2(2)} = \frac{11 \pm 9}{4}}$$

Se obtienen las raíces $\mathbf{x_1 = 1/2}$ **y** $\mathbf{x_2 = 5}$, por lo tanto la factorización de P(x) es

$$\mathbf{P(x) = 2(x - \tfrac{1}{2})(x - 5) = (2x - 1)(x - 5)}$$

La respuesta correcta es la opción c)

7. Dado $\mathbf{P(x) = mx^2 - x + 5 - 3m}$ ¿Cuánto debe valer **m** para que **x = 2** sea una raíz de P(x)?

- **a) 3**
- **b) 2**
- **c) -2**
- **d) -3**

SOLUCIÓN

Para que x = 2 sea una raíz de P(x), P(2) debe ser igual a cero, es decir

$\mathbf{P(2) = m(2)^2 - (2) + 5 - 3m = 0}$, de aquí $\mathbf{4m - 2 + 5 - 3m = 0}$

Resolviendo para m: $\mathbf{m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3}$

La respuesta correcta es la opción d)

8. "Las tarifas por fletes aéreos son directamente proporcionales a la distancia del viaje (en millas) y al peso del bulto transportado". Si **t** es la tarifa, **d** la distancia de viaje y **p** el peso del bulto, lo anterior en símbolos se expresa como:

- **a)** $\mathbf{t = \alpha(p+d)}$
- **b)** $\mathbf{t = \alpha pd}$
- **c)** $\mathbf{t = \alpha + pd}$

d) t = pd

SOLUCIÓN

La tarifa **t** directamente proporcional a la distancia **d** y al peso del bulto **p** significa que t = αpd , siendo α una constante de proporcionalidad.

La respuesta correcta es la opción b)

OBSERVACION

Esta pregunta también se podría responder usando el descarte. La opción a) señala que t es proporcional a la suma de peso (que se mide en kg) y distancia (que se mide en millas), lo cual carece de sentido. La opción c) es una suma entre una constante α y el producto de peso y distancia, lo cual también carece de sentido. En la opción d) no aparece constante de proporcionalidad.

9. ¿Cuál es el valor de $\mathbf{f(\frac{3\pi}{4})}$, si $\mathbf{f(x) = \dfrac{1 + sen(2x)}{2}}$?

a) $\mathbf{0}$

b) $\mathbf{\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}}$

c) $\mathbf{1}$

d) $\mathbf{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

SOLUCIÓN

Sustituyendo **x** por su valor en la fórmula, es decir, evaluando la función para $\mathbf{x} = \frac{3\pi}{4}$ se tiene

$$\mathbf{f}(\tfrac{3\pi}{4}) = \frac{1+\mathrm{sen}(2\,\frac{3\pi}{4})}{2} = \frac{1+\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{2})}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$

La respuesta correcta es la opción a).

10. Al simplificar la expresión $\dfrac{1}{1-\mathrm{sen}(\alpha)} + \dfrac{1}{1+\mathrm{sen}(\alpha)}$ se obtiene

a) $(2+2\mathrm{sen}(\alpha))/\cos^2(\alpha)$

b) $2\sec^2(\alpha)$

c) $2\csc^2(\alpha)$

d) $(2+2\mathrm{sen}(\alpha))/\mathrm{sen}^2(\alpha)$

SOLUCIÓN

Sacando mínimo común múltiplo y desarrollando

$$\frac{1}{1-\mathrm{sen}(\alpha)} + \frac{1}{1+\mathrm{sen}(\alpha)} = \frac{1+\mathrm{sen}(\alpha)+1-\mathrm{sen}(\alpha)}{(1-\mathrm{sen}(\alpha))(1+\mathrm{sen}(\alpha))} = \frac{2}{1-\mathrm{sen}^2(\alpha)} = \frac{2}{\cos^2(\alpha)} = 2\sec^2(\alpha)$$

La respuesta correcta es b).

OBSERVACIÓN

Aquí se deben recordar las identidades trigonométricas $\mathbf{sec\,x = \frac{1}{cos\,x}}$ y $\mathbf{sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1}$

11. ¿Cuál es una expresión equivalente a $\mathbf{log_a \left(\frac{-x\,y^5}{z^3} \right)^{1/2}}$, para **y, z > 0** y **x < 0**?

a) $\mathbf{\frac{1}{2}\left[log_a(-x) + 5\,log_a\,y - 3\,log_a\,z \right]}$

b) $\mathbf{\frac{1}{2}\left[-log_a\,x + 5\,log_a\,y - 3\,log_a\,z \right]}$

c) $\mathbf{\frac{1}{2}\left[log_a(-x) - 5\,log_a\,y + 3\,log_a\,z \right]}$

d) $\mathbf{\frac{1}{2}\left[-log_a\,x - 5\,log_a\,y + 3\,log_a\,z \right]}$

SOLUCIÓN

Usando las propiedades de los logaritmos

$$\log_a \left(\frac{-xy^5}{z^3} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \log_a \left(\frac{-xy^5}{z^3} \right) = \frac{1}{2} \left[\log_a(-x) + 5\log_a y - 3\log_a z \right]$$

La respuesta correcta es a).

12. ¿Cuál es el valor de **x** que satisface la ecuación

$\mathbf{log_4 5 + log_4 (x+1) = log_4 16, \quad x > -1}$?

a) - 3/5
b) 11/5
c) 3/5
d) - 1/5

SOLUCIÓN

Usando las propiedades de los logaritmos se tiene

$$\log_4 5 + \log_4 (x+1) = \log_4 5(x+1) \Rightarrow \quad \log_4 5(x+1) = \log_4 16$$

$$\Rightarrow \quad 5(x+1) = 16 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = \frac{16}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11}{5}$$

La respuesta correcta es b).

OBSERVACIÓN

Para la solución de este ejercicio y el anterior es necesario aplicar alguna(s) de las siguientes propiedades:

1. $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$ logaritmo de un producto
2. $\log_a(m/n) = \log_a m - \log_a n$ logaritmo de un cociente
3. $\log_a m^n = n \log_a m$ logaritmo de una potencia
4. $\log_a a^m = m$ logaritmo de una potencia de la base

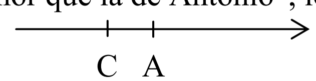
13. Antonio, Mercedes, Carolina, David y Emilio, presentaron un examen de Matemática. Carolina obtuvo una calificación menor que la de Antonio, pero mayor que la de David. Antonio y Carolina obtuvieron menor calificación que Emilio, pero mayor que Mercedes, que no fue la que obtuvo menor nota. ¿Quién de ellos obtuvo la segunda mejor calificación?

- **a) David**
- **b) Antonio**
- **c) Mercedes**
- **d) Carolina**

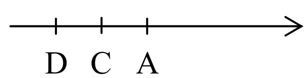
SOLUCION

Representemos las relaciones de las calificaciones, con las iniciales de los nombres de los estudiantes

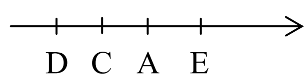
“Carolina obtuvo una calificación menor que la de Antonio”, lo podemos representar gráficamente



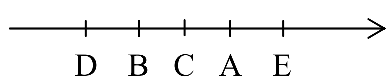
“pero mayor que la de David”



“Antonio y Carolina obtuvieron menor calificación que Emilio”



“pero mayor que Berenice, que no fue la que obtuvo menor nota”



De aquí se puede apreciar que quien obtuvo la segunda mejor calificación fue Antonio

La respuesta correcta es la opción b)

OBSERVACION

La clave para encontrar la solución está en traducir correctamente cada expresión del lenguaje a la representación gráfica.
El concepto matemático involucrado, es el uso de las relaciones “mayor que” y “menor que”, así como la representación de las mismas en la recta real.

14. Dado el polinomio $\mathbf{P(x) = x^2 + 2x + 9}$. Una expresión para $\mathbf{2P(a) - P(-a)}$ es

a) $\mathbf{(a+3)^2}$

b) $\mathbf{3(a^2 + 2a + 9)}$

c) $\mathbf{(a+2)^2 + 14}$

d) $\mathbf{(a+1)^2 + 26}$

SOLUCIÓN

Evaluando P(x) en x = a : $\mathbf{P(a) = a^2 + 2a + 9}$,

De igual manera evaluando P(x) en x = –a: $\mathbf{P(-a) = (-a)^2 + 2(-a) + 9 = a^2 - 2a + 9}$,

Entonces 2P(a) – P(–a) es $\mathbf{2a^2 + 4a + 18 - a^2 + 2a - 9 = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2}$

La solución correcta es la opción a)

15. ¿Cuál es la solución $\mathbf{x, y}$ del sistema $\begin{cases} \mathbf{x^2 - y^2 = 3} \\ \mathbf{x + y = 6} \end{cases}$?

a) x = 39/12, y = 33/12
b) x = 12/39, y = –12/33
c) x = 7, y = 1
d) x = 2, y = 1

SOLUCIÓN

Dado que $\mathbf{x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)}$ y $\mathbf{x+y=6}$, el sistema se puede sustituir por el sistema equivalente $\begin{cases} \mathbf{6(x-y)=3} \\ \mathbf{x+y=6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x-y=1/2} \\ \mathbf{x+y=6} \end{cases}$

Sumando las ecuaciones se tiene $\mathbf{2x = \frac{13}{2}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = \frac{13}{4} = \frac{39}{12}}$

Despejando $\mathbf{y}$ de la segunda ecuación $\quad \mathbf{y = 6 - x = 6 - \frac{39}{12} = \frac{33}{12}}$

La respuesta correcta es a).

OBSERVACIÓN

En la solución del problema se usó el siguiente producto notable: $\mathbf{m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)}$

16. ¿Cuál es la solución de la ecuación $\mathbf{(\sqrt{x}+1)^2 + \sqrt{x} - x = 7}$?

- **a)** $\mathbf{2}$
- **b)** $\mathbf{\sqrt{2}}$
- **c)** $\mathbf{4}$
- **d)** $\mathbf{\sqrt{6}}$

SOLUCIÓN

Desarrollando el binomio al cuadrado en la ecuación y operando algebraicamente

$$\mathbf{x + 2\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - x = 7 \quad \Rightarrow \quad 3\sqrt{x} = 6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4}$$

La respuesta correcta es c)

OBSERVACIÓN

Recuerde que $\mathbf{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$

17. ¿Cuál es una solución de la ecuación $\mathbf{3^{x^2-x-2} = \frac{1}{9}}$?

- **a) – 1**
- **b) 2**
- **c) – 2**
- **d) 1**

SOLUCIÓN

Como $\mathbf{\frac{1}{9} = 3^{-2}}$, entonces, expresando ambos lados de la igualdad como potencias de base 3, se puede escribir la ecuación en la forma $\mathbf{3^{x^2-x-2} = 3^{-2}}$

De donde se tiene $\mathbf{x^2 - x - 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-1) = 0}$

Cuyas soluciones son $\mathbf{x = 0}$ y $\mathbf{x = 1}$

La respuesta correcta es d)

18. Al simplificar la expresión $\mathbf{\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^x}}$, se obtiene

- **a) – 4**
- **b) 2**
- **c) 4**
- **d) – 2**

SOLUCIÓN

Usando las propiedades elementales de la potenciación podemos escribir la expresión dada como

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}=\frac{-1}{\left(\frac{1}{2}\right)}=-2$$

La respuesta correcta es d)

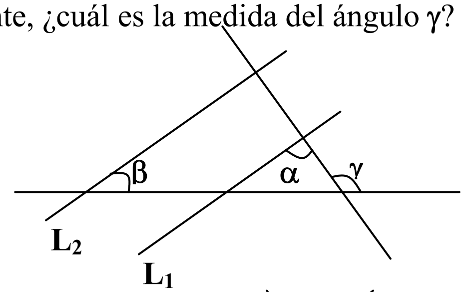
OBSERVACIÓN

Algunas propiedades elementales de la potenciación son

1. $\mathbf{a^m a^n = a^{m+n}}$
2. $\mathbf{(a/b)^m = a^m/b^m}$
3. $\mathbf{1/a^m = a^{-m}}$
4. $\mathbf{a^0 = 1,\ a \neq 0}$
5. $\mathbf{a^1}$

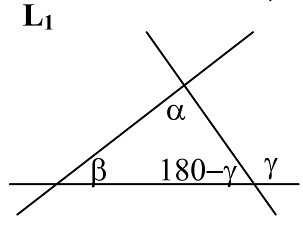
19. En la figura de la derecha $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$ son rectas paralelas, α y β son ángulos cuyas medidas son **60°** y **45°** respectivamente, ¿cuál es la medida del ángulo γ?

- **a) 75°**
- **b) 120°**
- **c) 150°**
- **d) 105°**



SOLUCIÓN

Considerando el triángulo pequeño



Como la suma de los ángulos internos de un triángulo debe ser 180º, se debe cumplir que $\alpha + \beta + 180 - \gamma = 180$, de aquí, despejando el ángulo pedido $\gamma = \alpha + \beta \Rightarrow \gamma = 60^{o} + 45^{o} = 105^{o}$

La respuesta correcta es la opción d)

20. La secuencia numérica **23 27 21 25 19 23…** se formó siguiendo un cierto patrón de regularidad. ¿Cuál es el número que se obtiene en la octava posición, al usar dicho patrón ?

a) 25
b) 17
c) 21
d) 27

SOLUCION:
Si colocamos los números de la secuencia dada en casillas etiquetadas de 1 a 8, tendremos

Casilla	1	2	3	4	5	6	7	8
Número	23	27	21	25	19	23	**17**	**21**

Observamos que para pasar del número en la casilla 1 al de la casilla 2 sumamos 4
del número de la casilla 2 al de la casilla 3 restamos 6
del número de la casilla 3 al de la casilla 4 sumamos 4
del número de la casilla 4 al de la casilla 5 restamos 6
del número de la casilla 5 al de la casilla 6 sumamos 4
para pasar de la casilla 6 a la 7 debemos restar 6, por lo que el número correspondiente debe ser 17 y finalmente para pasar de la 7 a la 8, debemos sumar 4, con lo que obtenemos el número 21.
Otra manera de resolver este problema es analizando el patrón que siguen los números ubicados en casillas pares y los ubicados en casillas impares por separado. Los números que ocupan posiciones pares siguen el patrón : 27 25 23 , es decir, disminuyen restando dos unidades al de la posición par anterior, por lo que nuevamente, el valor que corresponde a la posición 8 es 23 – 2 = 21

La respuesta correcta es c)

21. Al simplificar la expresión $\dfrac{b^{-1}\left(a+b^{-1}\right)}{a^{-1}\left(a^{-1}+b\right)}$, con **a>0** y **b>0,** se obtiene

a) a^2/b^2

b) b^2/a^2

c) a/b

d) b/a

SOLUCIÓN

Escribiendo la expresión con potencias positivas y operando

$$\frac{a(a+\frac{1}{b})}{b(\frac{1}{a}+b)}=\frac{a\left(\frac{ab+1}{b}\right)}{b\left(\frac{1+ab}{a}\right)}=\frac{a^2(ab+1)}{b^2(1+ab)}=\frac{a^2}{b^2}$$

La respuesta correcta es la opción a)

22. Sara es 7 años mayor que Pedro. Si el producto de sus edades es 60 ¿Cuál es la edad de Pedro?

a) 15 años
b) 4 años
c) 12 años
d) 5 años

SOLUCION

Designando por **x** la edad de Pedro y por **y**, la edad de Sara, se tiene que**:** $\mathbf{y = x + 7}$, además $\mathbf{xy = 60}$. Se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que se debe resolver para hallar **x**, que es lo que se pide.

Despejando **y** de la segunda ecuación, e igualando con la primera:

$\mathbf{\frac{60}{x} = x + 7}$**,** esto conduce a la ecuación cuadrática $\mathbf{x^2 + 7x - 60 = 0}$, la cual se puede resolver por la fórmula cuadrática o factorizando el trinomio de segundo grado $\mathbf{(x+12)(x-5) = 0}$, obteniendo $\mathbf{x = -12}$ o $\mathbf{x = 5}$. Se descarta el valor negativo ya que en este caso **x** representa edad, por lo tanto la edad de Pedro es 5 años.

La respuesta correcta es la opción d)

23. La suma de las edades de tres personas es 88 años. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio tiene 18 años menos que la mayor. La edad de la menor es:

- **a) 33 años**
- **b) 23 años**
- **c) 32 años**
- **d) 22 años**

SOLUCION

Representando con **x** la edad de la mayor, se tiene que la edad de la menor es $\mathbf{x - 20}$ y la del medio $\mathbf{x - 18}$. Como la suma de las tres edades debe ser 88, entonces $\mathbf{x + x - 18 + x - 20 = 88}$, y de aquí despejando **x** , $\mathbf{3x = 126 \Rightarrow x = 42}$, esta es la edad de la mayor, por lo que la edad de la menor es $\mathbf{42 - 20 = 22}$ años.

La respuesta correcta es d)

24. La solución de la ecuación $\mathbf{ln}(x+5) + \mathbf{ln}(x-3) = 2\,\mathbf{ln}(x-1)$ es:

- **a) −4**
- **b) 8**
- **c) 7**
- **d) 4**

SOLUCION

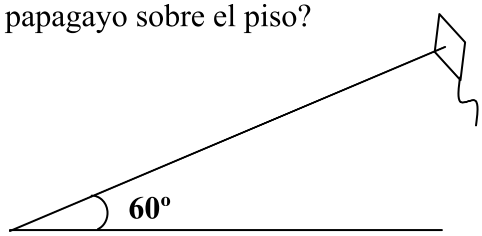
Para resolver la ecuación dada se hará uso de las propiedades de los logaritmos a las cuales ya se hizo referencia. De esta manera la ecuación se puede escribir en la forma

$\mathbf{\ln(x+5)(x-3)=\ln(x-1)^2 \Rightarrow (x+5)(x-3)=(x-1)^2}$. Desarrollando esta última ecuación

$\mathbf{x^2 + 2x - 15 = x^2 - 2x + 1}$ y despejando **x** : $\mathbf{4x = 16 \Rightarrow x = 4}$

La respuesta correcta es d)

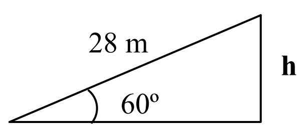
25. La cuerda de un papagayo forma un ángulo de **60º** con la horizontal y tiene una longitud de **28 m** ¿Cuál es la altura del papagayo sobre el piso?



a) $\mathbf{28\sqrt{3}}$
b) **28**
c) $\mathbf{14\sqrt{3}}$
d) **14**

SOLUCION

En el dibujo se puede observar que si
Si **h** es la altura buscada, se tiene



$$\boldsymbol{sen\left(60^o\right)=\frac{h}{28} \Rightarrow h = 28 sen(60^o)}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \quad h = 28\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 14\sqrt{3}\, m}$$

La respuesta correcta es la c)

Problemas Propuestos

1. Dados los polinomios $\mathbf{P(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x}$ y $\mathbf{R(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x}$, $\mathbf{x \in R}$. ¿Cuál es una expresión para **R(x) + 3P(x)**?

a) 0
b) 2 R(x)
c) 2 P(x)
d) $\mathbf{-\frac{2}{3}x^3 + 4x}$

2. ¿Cuál es la solución de la ecuación $\mathbf{Log(5x) = Log15 + 2Logx}$, $\mathbf{x > 0}$?

a) 2
b) 3
c) 1/3
d) 3/2

3. Si $\mathbf{Log\sqrt[3]{x} = 1{,}26}$, ¿cuál es el valor de **Log(10x), x > 0**?

a) 37,8
b) 1,42
c) 3,78
d) 4,78

4. ¿Cuál es la solución de la ecuación $\mathbf{Log(x^2 - 25) - Log(x + 5) = 3,\ x > 5}$?

a) 1000
b) 1005
c) – 5
d) 8

5. ¿Cuál es el número **x**, que satisface la ecuación $\sqrt{2\sqrt{3x}-2} = 1$?

a) 3/4
b) 1/2
c) 1/4
d) 0

6. ¿Cuáles deben ser los valores de las constantes **c** y **d** para que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} cx + dy = 1 \\ dx + 2y = -c \end{cases}$ tenga solución **x = 1**, **y = –1**?

a) c = 1, d = 0
b) c = 3/2, d = 1/2
c) c = –3/2, d = 1/2
d) c = 0, d = 1

7. ¿Cuál es una expresión más simple para $\dfrac{3x(9-x^4)}{9x-3x^3}$, $x \neq 0,\ x \neq \pm\sqrt{3}$?

a) $\dfrac{1-x^4}{-x^3}$

b) $3 + x^2$

c) $\dfrac{3-x^2}{x-3}$

d) $3 - x^2$

8. El lado y ángulo desigual de un triángulo isósceles miden respectivamente, **20 cm** y **90°**. ¿Cuánto miden sus lados iguales?

a) $10\sqrt{2}$
b) $20\sqrt{2}$
c) $30\sqrt{2}$
d) $40\sqrt{2}$

9. Una escalera de **4 m** de longitud debe formar un ángulo máximo de **60°** con el piso para considerarse segura. ¿Cuál es la altura máxima que sobre una pared puede alcanzar la escalera para conservar la seguridad?

a) **2 m**
b) **4 m**
c) $\sqrt{3}$ **m**
d) $2\sqrt{3}$ **m**

10. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $\frac{x+4}{x}+\frac{x}{2}=\frac{3x}{2}-2$?

a) 4, 3
b) −1, 6
c) 4, −1
d) 3, 6

11. ¿Cuál es una expresión más simple para $\frac{3^x 3^2 - 3^{x+1}}{3^x 3^{x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$?

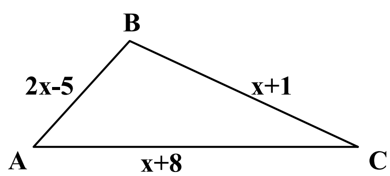
a) 2
b) 2.3^{-x}
c) 8
d) 9

12. ¿Cuál es una solución de la ecuación $\mathbf{5^{x^2-x-2} = \frac{1}{25}}$?

a) – 1
b) 2
c) 1
d) – 2

13. El perímetro del triángulo **ABC** en la figura es **52**. ¿Cuál es el valor de **x** ?

a) 12
b) 13
c) 14
d) 18



14. Racionalizando el denominador de la expresión $\mathbf{\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}$ y simplificando se obtiene

a) $\mathbf{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$
b) $\mathbf{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$
c) $\mathbf{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$
d) $\mathbf{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$

15. ¿Cuál es una expresión más simple para $\mathbf{\frac{3(x-2)^2(x+1)^2 - 2(x-2)(x+1)^3}{(x-2)(x+1)^2}}$?

a) $\mathbf{(x-2)\left[3-2(x+1)^3\right]}$

b) $(x-8)$

c) $(x-4)$

d) $(x-2)(x+1)(1+3x)$

16. La secuencia de números: **17 12 15 10 13**… se formó siguiendo un cierto patrón de regularidad. ¿Qué número se obtiene en la octava posición al usar el mismo patrón?

a) 9
b) 11
c) 8
d) 6

17. El largo de un rectángulo es **(n+2)** en cm. Si su ancho es **4** cm menor que su largo, su área expresada en cm^2 es

a) n^2+4
b) n^2-4
c) n^2+2n
d) n^2-2n+4

18. En una clase de 30 estudiantes 12 son varones. Si se aceptan 6 varones más ¿Qué parte de la clase está formada por varones?

a) 2/5
b) 1/2
c) 3/5
d) 9/16

19. Alfonso, Bernabé, Carmen, Daniel y Ernesto se citaron en el aeropuerto para tomar el mismo vuelo. Carmen fue la primera en llegar. Bernabé llego inmediatamente después de Ernesto, pero antes que Alfonso y cuando llegó Daniel, Bernabé ya estaba en la fila de espera ¿Quién llegó en tercer lugar?

a) **Daniel**
b) **Bernabé**
c) **Alfonso**
d) **Ernesto**

20. El promedio de **N** y otro número **M** es **X**, entonces **M** es

a) $\frac{\mathbf{N+X}}{\mathbf{2}}$
b) **2X-N**
c) **2N-X**
d) **N-X**

21. Si $\mathbf{f(x) = \frac{sen(3x)+1}{4}}$, entonces el valor de $\mathbf{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ es:

a) **1/4**
b) **0**
c) **1/2**
d) **1**

22. Al simplificar la expresión $\mathbf{\frac{cosx}{senx} + \frac{senx}{1+cosx}}$ se obtiene:

a) **1**
b) $\mathbf{\frac{1}{senx}}$

c) $\frac{1}{3+\cos x}$

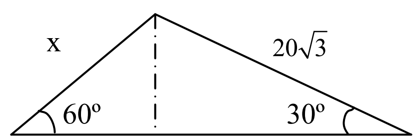
d) $\cos x+1$

23. Un triángulo **ABC** es equilátero. Si $\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{3x+1}$, $\overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{2x+6}$ *y* $\overline{\mathbf{BC}} = \mathbf{x+11}$ entonces su perímetro es

a) 48
b) 36
c) 24
d) 18

24. En el triángulo mostrado en la figura ¿Cuál es el valor de **x**?

a) 60
b) $10\sqrt{3}$
c) 40
d) 20



25. Cecilia, David, Francisco, Gabriela y Angela, tienen diferentes cantidades de dinero. Gabriela y Cecilia tienen menos dinero que Francisco. Tanto Cecilia como David tienen más dinero que Angela. Gabriela tiene más dinero que David pero menos que Cecilia. ¿Quién tiene la menor cantidad de dinero?

a) Cecilia
b) Gabriela
c) Angela
d) David

26. Dado el polinomio $\mathbf{P(x)= 7x^2 -5x+k}$. ¿Cuánto debe valer **k** para que dicho polinomio sea divisibles por **x – 2**?

a) 18
b) 9
c) -18
d) - 9

27. Si $\mathbf{(m\text{-}n)^2=16}$ *y* $\mathbf{m.n=21}$ ¿Cuál es el valor de $\mathbf{m^2+n^2}$?

a) 26
b) 256
c) 10
d) 58

28. Si las medidas de los ángulos de un triángulo están en la relación **1:5:6**, el triángulo es

a) Rectángulo
b) Acutángulo
c) Obtusángulo
d) Isósceles

29. Según investigaciones recientes, aproximadamente un tercio de la población adulta, presenta síntomas de alguno de los 88 trastornos del sueño conocidos. La tabla muestra la incidencia en la población de solo cinco de los trastornos principales.

Trastorno	**Porcentaje**
Insomnio	6,0
Apnea	4,2
Hipersomnia	1,5
Trastornos cicardianos	1,5
Narcolepsia	0,8

¿Qué porcentaje de la población, aproximadamente, padece alguno de los trastornos del sueño no indicados en la tabla?

a) 10 %

b) 15 %

c) 20 %

d) Menos del 10 %

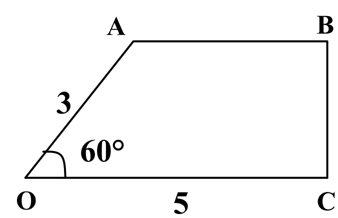
30. El área del cuadrilátero **OABC** mostrado en la figura es

a) $\frac{51\sqrt{3}}{8}$

b) $\frac{9\sqrt{3}}{8}$

c) $\frac{21\sqrt{3}}{8}$

d) $\frac{53\sqrt{3}}{8}$



31. Un campo rectangular es **20 m** más largo que ancho y está cercado con **100 m** de alambre, ¿cuáles son las dimensiones, en metros, del campo?

a) 65 y 35

b) 60 y 40

c) 40 y 20

d) 35 y 15

32. ¿Cuál es una solución de la ecuación $\frac{1}{(y+2)^2} - 6 = \frac{1}{(y+2)}$?

a) $\frac{2}{5}$

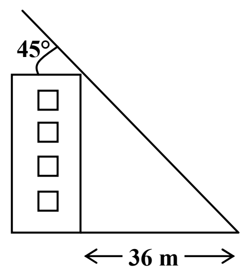
b) $-\frac{5}{3}$

c) $\frac{5}{2}$

d) $-\frac{3}{5}$

33. Sobre un edificio de altura **h**, el sol incide con un ángulo de **45°** y este proyecta una sombra de **36 m**, tal como se muestra en la figura ¿cuál es la altura, en **m**, del edificio?

a) 72
b) 48
c) 36
d) 18



34. La razón entre las edades de Juan y Pedro actualmente es 4/5 respectivamente y hace 5 años era 7/9. Las edades de Juan y Pedro son:

a) **32 y 40**
b) **36 y 45**
c) **40 y 50**
d) **44 y 55**

35. ¿Cuál es la solución de la ecuación $\log_2 8^x = 6$?

a) **8**
b) **6**
c) **3**
d) **2**

36. Dados los polinomios $P(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + 2x$ y $Q(x) = x^4 + 4x$.

¿Cuál es el polinomio $\mathbf{S(x) = 2P(x) - Q(x)}$?

a) $\mathbf{2x^4+6x}$

b) $\mathbf{2x^3}$

c) $\mathbf{2x^4+2x^3}$

d) $\mathbf{6x}$

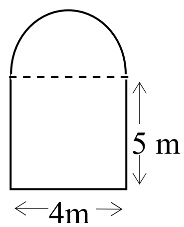
37. ¿Cuál es el área, en m^2, de un terreno que tiene la forma y dimensiones mostradas en la figura, si el arco superior es el de una semicircunferencia?

a) $\mathbf{2\pi+20}$

b) $\mathbf{4\pi+20}$

c) $\mathbf{6\pi+20}$

d) $\mathbf{8\pi+20}$



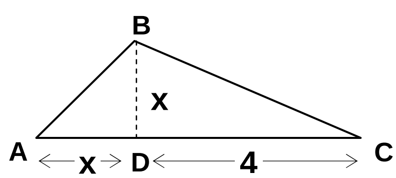
38. El área del triángulo **ABC** de la figura es **6** unidades de área. ¿Cuál es el valor del área del triángulo **BCD**?

a) **1**

b) **2**

c) **4**

d) **6**



39. ¿Cuál de las siguientes, representa una expresión más simple para $\mathbf{\dfrac{-3x^2 - 12x + 96}{x + 8}}$?

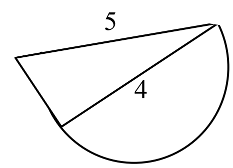
a) $\mathbf{-3x+12}$

b) $\mathbf{x-4}$

c) $\mathbf{x+4}$

d) $\mathbf{-3x-12}$

40. La figura representa un triángulo rectángulo con un semicírculo pegado a uno de sus lados. El área de esta figura es



a) $2\pi + 6$
b) $8\pi + 6$
c) $16\pi + 6$
d) $4\pi + 6$

41. En una Facultad, el número total de estudiantes que cursa Geometría es 250. El 80 % de los mismos cursa también Cálculo. Si el total de estudiantes en Cálculo es el doble de los que cursan ambas materias ¿Cuál es el total de estudiantes en Cálculo?

a) 500
b) 400
c) 350
d) 300

42. ¿Cuál es la solución $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ del sistema de ecuaciones dado? $\begin{cases} (\mathbf{x} + 2\mathbf{y})^2 - 3\mathbf{x} = 4 \\ \mathbf{x} + 2\mathbf{y} + 3 = 0 \end{cases}$

a) (−7/3, −1/3)
b) (5/3, −7/3)
c) (−5/3, −2/3)
d) (−23/3, 7/3)

43. ¿Cuál es el valor de $\mathbf{\log_4(1024)}$?

a) 4
b) 256
c) 32

d) 5

44. Una solución de la ecuación $\mathbf{2^{2x^2} = 8(2^{-5x})}$ es

a) 3
b) 0
c) −1/2
d) −3

45. Al simplificar $$\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^3\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^6\left(\frac{1}{9}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{1}{9}\right)^3\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{1}{7}\right)^2}$$ se obtiene:

a) 9/7
b) 7/9
c) 9/4
d) 4/7

Ahora verifica tus respuestas

1. c)
2. c)
3. d)
4. b)
5. a)
6. b)
7. b)
8. a)
9. d)
10. c)
11. b)
12. c)
13. a)
14. b)
15. b)
16. d)
17. b)
18. b)
19. b)
20. b)
21. c)
22. b)
23. a)
24. d)
25. c)
26. c)
27. d)
28. a)
29. c)
30. a)
31. d)
32. b)
33. c)
34. c)
35. d)
36. b)
37. a)
38. c)
39. a)
40. a)
41. b)
42. b)
43. d)
44. d)
45. a)